米田の補題

@phykm

2017 年 2 月 15 日

概要

米田の補題、表現可能性、前層の余極限表示について。記法上の注意：自然変換のコンポーネントは下添え字でアクセスし、$\alpha = \{\alpha_A\}_{A\in\mathbb{C}}$ となる。空欄の $-$ はそこを捕獲するラムダ抽象によって写像になっていることを省略している (したがってラムダ記号は書かれない)。ラムダ式は空欄 $-$ では曖昧さが生じるような無名関数の表記に用いられる。$\circ$ は射の合成を明確化する場合に用いられ、$(-)$ は演算順序の明記、および左隣の項への関数適用を表す。極限に限り、下添え字 s は summit、つまり錐の頂点を表す。自然変換は $\Rightarrow$ により、$\sim$ が付くものは同型であることを示す。その他は文中の指示による。以下 $\mathbb{C}$ は暗黙に locally small とする。

1　米田の補題

Theorem 1.1. $\mathbb{C}$ を *locally small* な圏、$F : \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$ を共変関手とする。この時、$A \in \mathbb{C}$ に対して一対一対応

$$\boldsymbol{y} : \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F) \simeq FA \tag{1}$$

があり、これは次のような自然同型として対象 $A \in \mathbb{C}$ および関手 F に関して自然である。

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(-,-),F) \overset{\sim}{\Rightarrow} F : \mathbb{C} \to \mathbf{Set} \tag{2}$$

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{ev}_A : \mathbf{Set}^{\mathbb{C}} \to \mathbf{Set} \tag{3}$$

ただし、$\mathrm{ev}_A : F \mapsto FA, \alpha \mapsto \alpha_A$ とする A 代入関手である。

Proof. 最初に構成とその全単射性を示す。構成は以下である。

$$\boldsymbol{y} : \alpha \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F) \mapsto \alpha_A(\mathrm{id}_A) \in F(A) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{y}^{-1} : x \in F(A) \mapsto \{(\lambda f \in \mathrm{Hom}(A,C).Ff(x))\}_{C\in\mathbb{C}} \tag{5}$$

$\boldsymbol{y}$ はただの写像を与えれば良いのでこれで well defined である。$\boldsymbol{y}^{-1}$ はこの構成が自然変換を与えていることを示す必要がある。その自然さとは以下である。$\forall h : C \to D \in \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,C) \arrow[r, "(\lambda f.Ff(x))"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(A,h)"'] & FC \arrow[d, "Fh"] \\
\mathrm{Hom}(A,D) \arrow[r, "(\lambda f.Ff(x))"'] & FD
\end{tikzcd} \tag{6}$$

これは次のように検証できる。

$$
\begin{aligned}
&Fh \circ (\lambda f.Ff(x)) && (7)\\
=&(\lambda f.(Fh \circ Ff)(x)) && (8)\\
=&(\lambda f.F(hf)(x)) && (9)\\
=&(\lambda f.F(\mathrm{Hom}(A,h)(f))(x)) && (10)\\
=&(\lambda f.Ff(x)) \circ \mathrm{Hom}(A,h) && (11)
\end{aligned}
$$

そしてこれは正確に逆写像である。明らかに $\boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{y}^{-1} = \mathrm{id}$ であるから、$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \boldsymbol{y} = \mathrm{id}$ を示す。α は自然変換であるから、$\forall f : A \to C$ について次を満たす。

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(A,f)"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\
\mathrm{Hom}(A,C) \arrow[r, "\alpha_C"'] & FC
\end{tikzcd}
\tag{12}
$$

とくにこれを $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A,A)$ について追跡すると、

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \alpha_A(\mathrm{id}_A) \arrow[d, mapsto] \\
f \arrow[r, mapsto] & \alpha_C(f) = Ff(\alpha_A(\mathrm{id}_A))
\end{tikzcd}
\tag{13}
$$

したがって、$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \boldsymbol{y}(\alpha) = \{(\lambda f.Ff(\alpha_A(\mathrm{id}_A)))\} = \alpha$ であり、正確に逆になっている。

$A \in \mathbb{C}$ に関する自然さを示す。それは $\forall f : A \to B \in \mathbb{C}$ について、

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F) \arrow[r, "\boldsymbol{y}"] \arrow[d, "(-\circ \mathrm{Hom}(f,-))"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(B,-),F) \arrow[r, "\boldsymbol{y}"'] & FB
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

である。ただし自然変換について以上の $\circ$ は垂直合成とする。これは $\forall \alpha$

$$
Ff \circ \boldsymbol{y}(\alpha) = \boldsymbol{y} \circ (\alpha \circ \mathrm{Hom}(f,-)) \tag{15}
$$

であるが、

$$
\begin{aligned}
Ff \circ \boldsymbol{y}(\alpha) =& Ff(\alpha_A(\mathrm{id}_A)) && (16)\\
\boldsymbol{y} \circ (\alpha \circ \mathrm{Hom}(f,-)) =& (\alpha \circ \mathrm{Hom}(f,-))_B(\mathrm{id}_B) && (17)\\
=& (\alpha_B \circ \mathrm{Hom}(f,B))(\mathrm{id}_B) && (18)\\
=& \alpha_B(f) && (19)
\end{aligned}
$$

より、$\alpha_B(f) = Ff(\alpha_A(\mathrm{id}_A))$ のことであるが、これはふたたび α の自然さにほかならず、成り立つ。したがって、$\boldsymbol{y}$ は $\mathbb{C}$ 対象について自然である。

$F \in \mathbf{Set}^{\mathbb{C}}$ に関する自然さを示す。それは $\forall \beta : F \Rightarrow G$ について、

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F) \arrow[r, "\boldsymbol{y}"] \arrow[d, "(\beta\circ -)"'] & FA \arrow[d, "\beta_A"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),G) \arrow[r, "\boldsymbol{y}"'] & GA
\end{tikzcd}
\tag{20}
$$

である。ただし自然変換について以上の $\circ$ は垂直合成とする。これは垂直合成が component-wise の合成であり、$\boldsymbol{y}$ が id_A の単純な代入であることから明らかに従う。 $\square$

Definition 1.2. 以上で得られる忠実充満な関手 $\boldsymbol{y}$ を米田関手と呼ぶ。$\boldsymbol{y}^{-1}$ は F が Hom 関手であった場合 $\mathbb{C}$ の埋め込みになり、米田埋め込みと呼ぶ。[*1]

双対に次も成り立つ。

Theorem 1.3. $\mathbb{C}$ を *locally small* な圏、$F : \mathbb{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ を反変関手とする。この時、$A \in \mathbb{C}$ に対して一対一対応

$$\boldsymbol{y} : \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(-, A), F) \simeq FA \tag{21}$$

があり、これは次のような自然同型として対象 $A \in \mathbb{C}$ および関手 F に関して自然である。

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(-, -), F) \Rrightarrow F : \mathbb{C}^{op} \to \mathbf{Set} \tag{22}$$

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(-, A), F) \Rrightarrow \mathrm{ev}_A : \mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}} \to \mathbf{Set} \tag{23}$$

ただし、$\mathrm{ev}_A : F \mapsto FA, \alpha \mapsto \alpha_A$ とする A 代入関手である。

構成は全く同じ $\boldsymbol{y}(\alpha) = \alpha_A(\mathrm{id}_A), \boldsymbol{y}^{-1}(x) = \{(\lambda f.Ff(x))\}$ である。

2 表現可能関手

Definition 2.1. 関手 $F : \mathbb{C}^{(op)} \to \mathbf{Set}$ が表現可能であるとは、ある対象 $A \in \mathbb{C}$ があって、この Hom 関手と自然同型になることとする。すなわち、$\exists \alpha : \mathrm{Hom}(A, -) \Rrightarrow F$ および $\exists \alpha : \mathrm{Hom}(-, A) \Rrightarrow F$ のこと。このとき、この対象 A は、F を表現するといい、またこの自然同型の米田による像 $\boldsymbol{y}(\alpha) \in FA$ を普遍的要素とよぶ。

Lemma 2.2. 表現可能関手を表現する対象は同型を除いて一意。

Proof. A, B が同じ関手を表現するとする。このとき自然同型 $\alpha : \mathrm{Hom}(A, -) \Rrightarrow \mathrm{Hom}(B, -)$ がある。そこで $\alpha_A(\mathrm{id}_A) : B \to A, \alpha_B^{-1}(\mathrm{id}_B) : A \to B$ を作ると、これは α の自然さによって同型を与える。$\mathrm{Hom}(-, A), \mathrm{Hom}(-, B)$ の場合も同様。 $\square$

米田による普遍的要素と表現可能性は強力な概念であり、普遍性と極限をその特別な場合に持つ。

Theorem 2.3. $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, D \in \mathbb{D}, C \in \mathbb{C}$ とする。$\eta : C \to G(D)$ が C から G への普遍射であることと、$\mathrm{Hom}(C, G(-)) : \mathbb{D} \to \mathbf{Set}$ が D に表現されることは同値。

Proof. 普遍射 $\eta : C \to G(D)$ による一意射対応は射の全単射 $\widehat{(-)} : \mathrm{Hom}(C, G(E)) \to \mathrm{Hom}(D, E)$ を定める。一意性によって、これは E に関して自然であり、この時明らかに D によって $\mathrm{Hom}(C, G(-))$ が表現される。逆に $\alpha : \mathrm{Hom}(D, E) \Rrightarrow \mathrm{Hom}(C, G(-))$ なる自然同型で D が $\mathrm{Hom}(C, G(-))$ を表現する時、$\eta = \boldsymbol{y}(\alpha) = \alpha_D(\mathrm{id}_D)$ ととって、$f : C \to G(D)$ に対して $\widehat{f} = \alpha_E^{-1}(f)$ ととる。$\widehat{(-)}$ は一対一対応であり、$\boldsymbol{y}$ の対象についての自然さによって、

$$G(\widehat{f}) \circ \eta = (G(\alpha_E^{-1}(f)) \circ \boldsymbol{y})(\alpha) = \boldsymbol{y}(\alpha \circ \mathrm{Hom}(-, \alpha_E^{-1}(f))) = \alpha_E(\alpha_E^{-1}(f)) = f \tag{24}$$

[*1] このため $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{y}^{-1}$ は逆の記法の方が多い。このノートでは面倒なのでこのままで記す。

となり、普遍射に要求されるダイアグラムを可換にする。 □

もちろん双対に次が成り立つ。

Theorem 2.4. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}, C \in \mathbb{C}, D \in \mathbb{D}$ とする。$\epsilon : F(C) \to D$ が F から D への余普遍射であることと、$\mathrm{Hom}(F(-), D) : \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$ が C に表現されることは同値。

したがって、普遍射、余普遍射は Hom 関手の引数に G, F を挟んだ関手が表現可能であるときの、普遍的要素のことである。

極限は普遍性に還元できたのでもちろんこれも表現可能性と普遍的要素に還元できる。

Theorem 2.5. $J : \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ の極限 $\mathrm{lim}J = (\mathrm{lim}J_s, \{l_j : \mathrm{lim}J_s \to J(j)\}_{j\in\mathbb{J}})$ があることと、この $\mathrm{lim}J_s$ が $\mathrm{Nat}(\Delta(-), J) : \mathbb{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ を表現することは同値。ただし、$\Delta(-) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\mathbb{J}}$ は、定数関手を返す関手とする。

Proof. $\mathrm{Nat}(\Delta(A), J)$ は A を頂点に持つ錐の集合そのものであり、$\mathrm{Nat}(\Delta(f), J)$ は錐の射の集合であることに注意する。もし極限が存在すれば, 錐 $C = \{C_s, \{k_j : C_s \to J(j)\}_{j\in\mathbb{J}}\}$ に対して、一意的に射 $!_C : C_s \to \mathrm{lim}J_s$ を錐の射として得られる。これによって、$\alpha : \mathrm{Nat}(\Delta(-), J) \Rightarrow \mathrm{Hom}(-, \mathrm{lim}J_s)$ を極限の普遍性によって $\alpha_*(C) = !_C$ で定義する。これは一対一対応であり、一意性によって自然である。逆に $\beta : \mathrm{Hom}(-, \mathrm{lim}J_s) \Rightarrow \mathrm{Nat}(\Delta(-), J)$ なる自然同型によって、$\mathrm{lim}J_s$ が $\mathrm{Nat}(\Delta(-), J)$ を表現する時、この自然同型は直接極限の普遍性に相当する。 □

もちろん双対に次が成り立つ。

Theorem 2.6. $J : \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ の余極限 $\mathrm{colim}J = (\mathrm{colim}J_s, \{l_j : J(j) \to \mathrm{colim}J_s\}_{j\in\mathbb{J}})$ があることと、この $\mathrm{colim}J_s$ が $\mathrm{Nat}(J, \Delta(-)) : \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$ を表現することは同値。

米田と表現可能性について、1 つだけ例を挙げる。

Fact 2.7. ベクトル空間 $V, W \in \mathbf{Vect}$ を取る。これらからの双線形写像 *(*あるいは一般に重線形写像*)* の集合を与える $\mathrm{Bilin}(V, W|-) : \mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$ が表現可能であるとき、またその時に限り、テンソル積 $V \otimes W$ が存在し、$\mathrm{Hom}(V \otimes W, -) \Rightarrow \mathrm{Bilin}(V, W|-)$ を与える自然同型の普遍的要素は $- \otimes - \in \mathrm{Bilin}(V, W|V \otimes W)$ である。

ある関手の表現可能性は、その要素の圏の性質によって特徴づけられる。

Definition 2.8. 共変関手 $F : \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$ の要素の圏とは、次のような対象と射をもつ圏 $\int F$ とする。

$$Ob_{\int F} = \{(A, x)|A \in Ob_{\mathbb{C}, x\in FA}\} \tag{25}$$
$$Ar_{\int F} = \{f : (A, x) \to (B, y)|f : A \to B \in Ar_{\mathbb{C}}, Ff(x) = y\} \tag{26}$$

双対に、反変関手 $F : \mathbb{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ の要素の圏とは、次のような対象と射をもつ圏 $\int F$ とする。

$$Ob_{\int F} = \{(A, x)|A \in Ob_{\mathbb{C}, x\in FA}\} \tag{27}$$
$$Ar_{\int F} = \{f : (A, x) \to (B, y)|f : A \to B \in Ar_{\mathbb{C}}, Ff(y) = x\} \tag{28}$$

Theorem 2.9. 共変関手 $F : \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$ が表現可能であることと、$\int F$ が始対象をもつことは同値。双対に、反変関手 $F : \mathbb{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ が表現可能であることと、$\int F$ が終対象をもつことは同値。

Proof. もし $F:\mathbb{C}\to\mathbf{Set}$ が $A\in\mathbb{C}$ によって表現されるとき、自然同型 $\alpha:\mathrm{Hom}(A,-)\Rightarrow F$ はこれらの要素の圏の同型を誘導する。

$$\int\alpha:\int\mathrm{Hom}(A,-)\to\int F \tag{29}$$

$$(B,x\in\mathrm{Hom}(A,B))\mapsto(B,\alpha_B(x)) \tag{30}$$

$$f\mapsto f \tag{31}$$

ところで $\int\mathrm{Hom}(A,-)$ は A スライス圏であり、明らかに (A,id_A) を始対象にもつ。したがって、$\int F$ においても $(A,\alpha_A(\mathrm{id}_A))$ が始対象になる。これは同時に普遍的要素でもある。逆に、$\int F$ が始対象 $(I,i\in FI)$ を持つ時、自然同型 $\alpha:\mathrm{Hom}(A,-)\Rightarrow F$ を次のように構成する。$(B,x\in FB)$ ごとに、始対象の普遍性によって $!_x:I\to B, F!_B(i)=x$ なる射を得る。そこで $\alpha^{-1}(x)=!_x$ とする。一意性によってこれの自然さと全単射性が従い、α は自然同型になる。 □

3 全ての前層は表現可能関手の余極限である

Definition 3.1. $\mathbb{C}$ 上の前層とは、集合圏への反変関手、すなわち $\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$ の元とする。

Theorem 3.2. 全ての前層は、ある表現可能関手のなすダイアグラムの余極限である。

Proof. ダイアグラムを構成するために、前層 $P:\mathbb{C}^{op}\to\mathbf{Set}$ による要素の圏 $\int P$ を構成する。要素の圏の対象は $\mathbb{C}$ の対象の情報をもつので、これと Hom 関手の構成を行う次の関手を考えることで、$\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$ 上のダイアグラムを得る。

$$M:\left(\int P\right)^{op}\to\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}} \tag{32}$$

$$(A,x\in PA)\mapsto\mathrm{Hom}(-,A) \tag{33}$$

$$f\mapsto\mathrm{Hom}(-,f) \tag{34}$$

P を頂点とする余錐を $C_P=(P,\{\boldsymbol{y}^{-1}(x):\mathrm{Hom}(-,A)\Rightarrow P\}_{(A,x)\in\int P})$ と構成する。M の像への自然変換が米田によって与えられていることに注意。実際これが余錐であることは次のように確認できる。自然変換であることは明らかなので、コンポーネントごとに余錐としての自然さを満たすことを見る。今反変関手を扱っているので、

$$f:A\to B\in\mathbb{C} \tag{35}$$

$$f:(B,y)\to(A,x)\in\int P\ \ (Pf(x)=y) \tag{36}$$

$$f:(A,x)\to(B,y)\in\left(\int P\right)^{op} \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

であることに注意して、

$$\begin{tikzcd} PC & \mathrm{Hom}(C,A) \arrow[l, "(\lambda f.Pf(x))"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(C,f)"] \\ & \mathrm{Hom}(C,B) \arrow[ul, "(\lambda f.Pf(y))"] \end{tikzcd} \tag{39}$$

は、$h \in \mathrm{Hom}(C, A)$ に対して、

$$((\lambda f.Pf(y)) \circ \mathrm{Hom}(C, f))(h) = P(fh)(y) = (Ph \circ Pf)(y) = Ph(x) = (\lambda f.Pf(x))(h) \tag{40}$$

と検証できる。この C_P が M の余極限であることを示す。

任意の M 余錐 $D = (D_s, \{\alpha_{(A,x)} : \mathrm{Hom}(-, A) \Rightarrow P\}_{(A,x)\in\int P})$ に対して、一意的な余錐射 $!_D : P \Rightarrow D_s$ を構成する。要求される条件は、これが錐の射であること、すなわち全ての $(A, x) \in \int P$ ごとに、すべての $C \in \mathbb{C}$ コンポーネントについて、

$$\begin{tikzcd}
D_sC & \mathrm{Hom}(C,A) \arrow[l, "\alpha_{(A,x)C}"'] \arrow[dl, "(\lambda f.Pf(x))"] \\
PC \arrow[u, "!_{DC}"] &
\end{tikzcd} \tag{41}$$

かつ、これが自然変換であることである。ところが、ここで $C = A$ となる特別な場合について $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ について追跡すると、$!_{DA}(x) = \alpha_{(A,x)A}(\mathrm{id}_A)$ つまり $!_{DA} = (\lambda x \in PA.\alpha_{(A,x)A}(\mathrm{id}_A))$ が要求される。今 A は任意なので、この条件は $!_D$ の全てのコンポーネントに唯一の可能性を与える。したがって、これが所要の条件を満たす事が唯一の可能性である。まずこれが余錐の射であることは、

$$\begin{tikzcd}
D_sC & \mathrm{Hom}(C,A) \arrow[l, "\alpha_{(A,x)C}"'] \arrow[dl, "(\lambda f.Pf(x))"] \\
PC \arrow[u, "!_{DC}"] &
\end{tikzcd} \tag{42}$$

$$\forall h \in \mathrm{Hom}(C, A) \tag{43}$$

$$\alpha_{(C,Ph(x))}(\mathrm{id}_C) = \alpha_{(A,x)C}(h) \tag{44}$$

であるが、これは、$\alpha_{(A,x)}$ が余錐であることについて、特に $h : C \to A$ についての C コンポーネント

$$\begin{tikzcd}
D_sC & \mathrm{Hom}(C,A) \arrow[l, "\alpha_{(A,x)C}"'] \\
& \mathrm{Hom}(C,C) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(-,h)"'] \arrow[ul, "\alpha_{(C,Ph(x))C}"]
\end{tikzcd} \tag{45}$$

を $\mathrm{id}_C \in \mathrm{Hom}(C, C)$ について追跡した結果である。また、自然変換であることは、$\forall f : B \to A \in \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
PA \arrow[r, "!_{DA}"] \arrow[d, "Pf"'] & D_sA \arrow[d, "D_sf"] \\
PB \arrow[r, "!_{DB}"'] & D_sB
\end{tikzcd} \tag{46}$$

$$\forall x \in PC \tag{47}$$

$$D_sf(\alpha_{(A,x)A}(\mathrm{id}_A)) = \alpha_{(B,Pf(x))B}(\mathrm{id}_B) \tag{48}$$

は、まず右辺について、$\alpha_{(A,x)}, \alpha_{(B,Pf(x))}$ が余錐 D の辺であることから、特に $f : (A, x) \to (B, Pf(x)) \in (\int P)^{op}$ について、

$$\begin{tikzcd}
D_sB & \mathrm{Hom}(B,B) \arrow[l, "\alpha_{(B,Pf(x))B}"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(-,f)"] \\
& \mathrm{Hom}(B,A) \arrow[ul, "\alpha_{(A,x)B}"]
\end{tikzcd} \tag{49}$$

を $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Hom}(B,B)$ について追跡することで、

$$\alpha_{(B,Pf(x))B}(\mathrm{id}_B) = \alpha_{(A,x)B}(f) \tag{50}$$

左辺については、$\alpha_{(A,x)}$ が $\mathrm{Hom}(-,A) \Rightarrow D_s$ 型の自然変換であること、および $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}^{-1}$ の構成から、

$$D_s f(\alpha_{(A,x)A}(\mathrm{id}_A)) = ((\boldsymbol{y}^{-1} \circ \boldsymbol{y})(\alpha_{(A,a)}))_B(f) = \alpha_{(A,x)B}(f) \tag{51}$$

となり、たしかに一致し、自然変換になっている。 □

もちろん双対に次が成り立つ。

Theorem 3.3. 共変関手 $R : \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$ は、以下のように表現可能関手のなすダイアグラムの余極限である。

$$N : \int P \to \mathbf{Set}^{\mathbb{C}} \tag{52}$$

$$(A, x \in PA) \mapsto \mathrm{Hom}(A,-) \tag{53}$$

$$f \mapsto \mathrm{Hom}(f,-) \tag{54}$$

$$\mathrm{colim} N = (P, \{\boldsymbol{y}^{-1}(x) : P \Rightarrow \mathrm{Hom}(A,-)\}_{(A,x)\in \int P}) \tag{55}$$

参考文献

[1] Emily.Riehl:Category theory in context,Dover 2016

[2] Saunders.MacLane:Categories for the working mathematician,2nd edition