グリーン関数と佐藤超函数

@phykm

2018 年 10 月 30 日

1　概要

波動方程式のグリーン関数を用いた解法において、しばし「$\pm\epsilon$ テクニック」が用いられる。これによって、積分の収束性が改善されて、計算が進み、どの処置をとったかによって先進グリーンと遅延グリーンが求まる…のだが、なんともアドホックで何が起きているのか、そもそもこんなことが許されるのかわからない。これはもとからグリーン関数が δ 関数などの特異的な関数を用いながらも、$\pm\epsilon$ といった、連続性をアテにした天下りな処理が行われているところに心理的不安感の原因がある。

さて、グリーン関数が δ 関数に関連付けられている以上、超関数を用いることは不可避だが、それはそれとして、アドホックな $\pm\epsilon$ 処理を使うことなくグリーン関数の解法をなぞれないか、という気持ちが湧いてくる。そこで、もっとも単純な一階の常備分方程式に対して、佐藤超函数を使った解釈を行う。[*1]佐藤超函数とは、実関数を直接定義するのではなく、その上下の複素領域の関数情報を使って実軸上関数「のようなもの」を定義する。これは通常の解析的関数を埋め込め、いくつかの算法は超関数のなかでも有効であるので、「キモチワルイ関数/方程式」を、超関数の空間に埋め込んでしまって、そこで方程式を解く、という処理を考えることができる。

2　佐藤超函数

Definition 2.1. $\Omega \subset \mathbb{R}, U \subset \mathbb{C}$、$\Omega$ は U の閉部分集合とする。Ω 上の佐藤超函数とは、$U \setminus \Omega$ 上定義された正則関数の、U 上定義された正則関数の $U \setminus \Omega$ 制限による商とする。

したがって、Ω 上では正則でなくてよいし、なんなら定義されていなくてもよい。しかしその複素近傍で $\mathrm{Im} \neq 0$ のところでは正則に定義されている必要がある。この近傍 U は、いろいろなとり方があるが、なにか一つあれば十分であることが知られている。現実的な計算の便宜を図って、もし解析接続できるなら広げてもよいし、局所的に済ませたいなら小さくとってもよい。正式な定義は、このような U の包含についての帰納極限で定義される。

商空間であるから、適当な $U \setminus \Omega$ の正則関数の代表元を取ってくることで、佐藤超函数を表示できる。例えばデルタ関数 $\delta(x - x_0)$ は $\left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-x_0}\right]$ である。

直感的には、$[F]$ は、

$$f(x) = F(x + i0) - F(x - i0) \tag{1}$$

[*1] 糠に釘、紙にガソリン、豆腐に油圧プレス…

を表現している。もちろん、このような極限 $F(x \pm i0)$ の存在がアヤシイ関数を表現したいからこのような定義になっているのだが、その超関数が具体的にどのような振る舞いなのかを観察するのにこの表示が使える。

通常の関数、とくに解析関数は、佐藤超函数へ埋め込める。たとえば $f(x)$ が Ω 上の解析関数であるとしよう。したがって、x の級数と思えるので、これをそのまま複素拡張すれば Ω の近傍で定義された正則関数になる。これを用いて、

$$f(x) \mapsto [f(z)\mathbf{1}_{\mathrm{Im}z>0}] = [-f(z)\mathbf{1}_{\mathrm{Im}z<0}] \tag{2}$$

とすればよい。ここで $\mathbf{1}$ は添字の条件を満たす集合の特性関数とする。

超関数のなかでいくつかの演算ができる。まず加法は線形空間の商空間として構成したから明らかに定義されている。乗法は、解析関数を係数環として掛けることができる。微分と積分は

$$\frac{d}{dx}[F] = [\frac{d}{dx}F] \tag{3}$$

$$\int_{[a,b]} [F]dx = \oint_{C_{a,b}} Fdz \tag{4}$$

である。これはやはり解析関数の埋め込みについて自然である。ここで、$C_{a,b}$ は、a, b を通過して、$[a, b]$ を含むような右回り軌道とする。実軸以外では正則なのだから、この軌道は実軸に近くてもいいし、離れていてもいい。

それからフーリエ変換。超関数自体のフーリエ変換は、フーリエ積分核が正則であるから、上記の積分を使えばよい。もし結果が通常の関数になった場合はそのままでもよいし、その関数が大きいのなら再び超関数として埋め込んでもよい。さらにもし積分結果が通常の関数にならない、ないし積分が収束しない場合は、波数を複素数にとって、次のように超関数を返すようにすることで定義を拡張する。実際、通常のフーリエ変換が可能な場合は、これは整合的な結果を返す。

$$\left(\int f(x)\exp(-ipx)dx\right)(p) = \left[\mathbf{1}_{\mathrm{Im}p>0}\left(\int_{-\infty+i\epsilon}^{0+i\epsilon} f(z)\exp(-ipz)dz - \int_{-\infty-i\epsilon}^{0-i\epsilon} f(z)\exp(-ipz)dz\right)\right. \tag{5}$$

$$\left. -\mathbf{1}_{\mathrm{Im}p<0}\left(\int_{0+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z)\exp(-ipz)dz - \int_{0-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} f(z)\exp(-ipz)dz\right)\right] \tag{6}$$

$$\left(\int f(x)\exp(ipx)dx\right)(p) = \left[\mathbf{1}_{\mathrm{Im}p>0}\left(\int_{0+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z)\exp(ipz)dz - \int_{0-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} f(z)\exp(ipz)dz\right)\right. \tag{7}$$

$$\left. -\mathbf{1}_{\mathrm{Im}p<0}\left(\int_{-\infty+i\epsilon}^{0+i\epsilon} f(z)\exp(ipz)dz - \int_{-\infty-i\epsilon}^{0-i\epsilon} f(z)\exp(ipz)dz\right)\right] \tag{8}$$

この定義は、次のように考えることができる。積分核の指数実部は $\mathrm{Im}z\mathrm{Re}p + \mathrm{Re}z\mathrm{Im}p$ で、今積分軌道は実軸に近づけることができるため、$\mathrm{Im}z$ は任意に小さく出来る。したがって積分核を指数的な減衰因子とするために $\mathrm{Re}z\mathrm{Im}p < 0$ であるように積分を分割している。

ちなみにデルタ関数 $\delta(x - x_0) = \left[\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-x_0}\right]$ に対して実際にフーリエ変換を行うと、

$$\int_{C_{-\infty,\infty}} \delta(x - x_0)\exp(ipz)dz = \exp(ipx_0) \tag{9}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_{-\infty,\infty}} \exp(ipx_0)\exp(-ipz)dp = \left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z - x_0}\right] \tag{10}$$

となって、ちゃんと逆変換になっている。フーリエ変換の微分などは通常のフーリエのそれと同様に成り立つ。

3 デモ

次の方程式を考える。

$$\left(i\frac{d}{dt}-k\right)U(t)=if(t) \tag{11}$$

これを解くための基本解として、次を満たすものをグリーン関数とする。

$$\left(i\frac{d}{dt}-k\right)G(t)=i\delta(t) \tag{12}$$

ここからは、次のような戦略で計算をしていく。扱っている数式に、超関数らしき不都合な項が出現するたび、それを佐藤超函数であるとして計算を続ける。今、時間実軸上の関数を考えていて、これは複素平面を二分するため、佐藤超函数の表示は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則関数によって代表出来るが、実質的に $\mathrm{Im}z>0, \mathrm{Im}z<0$ でそれぞれ定義される 2 つの複素関数を考え、全域で正則な関数だけの差を同一視したものとみなせる。まずこの式をフーリエ変換しよう。超関数のフーリエ変換として $\exp(i\omega t)$ をかけてから実軸を左回りに積分する。右辺はデルタ関数だから 1 になる。左辺は、微分について、逆フーリエ変換がすでに行われているとみなして $-i\omega$ に置き換える。

$$(\omega-k)\widehat{G}(\omega)=i \tag{13}$$

ω は複素数を取る。佐藤超函数は全域正則な関数を係数環にとれて、$(\omega-k)$ はまさに正則な係数と思える。一方右辺の i は、超関数としては $[i\mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega>0}]=[-i\mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega<0}]$ である。これを満たすような $\widehat{G}$ として次を考えられる。

$$\widehat{G}_1(\omega)=[\mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega>0}\frac{i}{\omega-k}] \tag{14}$$

$$\widehat{G}_2(\omega)=[-\mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega<0}\frac{i}{\omega-k}] \tag{15}$$

注意しなくてはいけないのは、この 2 つは超関数としては独立であるということである。この 2 つの代表の差は $i/(\omega-k)$ だが、これは全域で正則ではない。$\widehat{G}$ の解が実質 2 つあるということがこのあとで効いてくる。なお、この 2 つのアファイン結合でももちろん解になる。

この解をそれぞれ逆フーリエしよう。フーリエ変換は L^2 関数のユニタリ変換であったが、明らかに $G_{1,2}$ の代表関数は L^2 ではない。そこでやはりここでもこれらを超関数と解釈する。このため、フーリエ変換も超関数のそれを採ることになる。すなわち、ここでの積分軌道は実軸ではなく、$\mathbb{R}$ を右回りに周回する軌道である。G_1 の代表関数は複素平面の上側でしか値を取らないので、周回積分は実軸の僅か上を通る、通常の積分にとって変わられる。逆に G_2 は下側である。そしてこれが通常の計算における $\pm\epsilon$ 処理の正体である。

$$G_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon}\frac{i}{\omega-k}\exp(-i\omega t)dt \tag{16}$$

$$G_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon}\frac{i}{\omega-k}\exp(-i\omega t)dt \tag{17}$$

これを留数定理で計算しよう。[*2]次のように考える。$t>0$ であれば、$\mathrm{Im}\omega<0$ の領域で被積分関数は負の指数をもつ指数関数になる。したがってこの方向であれば、積分軌道を追加して拡大してもよい。$t<0, \mathrm{Im}\omega>0$

[*2] これは複素領域であれば素直に計算できるので、積分結果を超関数ではなく通常関数としてとることにする。

でも同様である。したがって、これらの積分に対して、$t > 0$ であれば、複素平面下半分を無限に遠く迂回する軌道を追加し、$t < 0$ であれば、複素平面上半分を無限に遠く迂回する軌道を追加し、それぞれ閉軌道にする。このとき、被積分関数の留数は実軸上に乗っている。したがって、$t > 0$ であれば、G_1 がこれを回収出来、$t < 0$ であれば、G_2 がこれを回収できる。それ以外の軌道では留数を回収できない。これは t についてのヘヴィサイド関数 θ が掛かっていることを意味する。したがって、

$$G_1(t) = \theta(t)\exp(-ikt) \tag{18}$$
$$G_2(t) = -\theta(-t)\exp(-ikt) \tag{19}$$

これはまさに遅延、先進グリーン関数にほかならならず、通常の $\pm\epsilon$ テクニックの結果を再現できたことになる。実際これをもとの方程式に代入すれば正しいことが確認出来る。

ついでにもう一つ、二次の方程式を見よう。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + k^2\right) U(t) = f(t) \tag{20}$$

を考える。これのためのグリーン関数として

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + k^2\right) G(t) = \delta(t) \tag{21}$$

を解こう。再びフーリエ変換によって

$$(-\omega^2 + k^2)\widehat{G}(\omega) = 1 \tag{22}$$

を佐藤超関数の意味で解けばよい。先と同様に考えると、

$$G_1(\omega) = \left[-\mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega>0}\frac{1}{\omega^2 - k^2}\right] \tag{23}$$
$$G_2(\omega) = \left[\mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega<0}\frac{1}{\omega^2 - k^2}\right] \tag{24}$$

がすぐに浮かぶ。しかしもう一つある。$1/(\omega^2 - k^2)$ は部分分数分解できて、しかもそれは正則ではない。つまり、

$$G_{+f}(\omega) = \frac{1}{2k}\left[-\mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega>0}\frac{1}{\omega - k} - \mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega<0}\frac{1}{\omega + k}\right] \tag{25}$$
$$G_{-f}(\omega) = \frac{1}{2k}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega>0}\frac{1}{\omega + k} + \mathbf{1}_{\mathrm{Im}\omega<0}\frac{1}{\omega - k}\right] \tag{26}$$

もまた解である。先と同様に $t > 0, t < 0$ に応じて軌道を追加してフーリエ変換することで、

$$G_1(t) = \theta(t)\frac{\sin(kt)}{k} \tag{27}$$
$$G_{+f}(t) = \theta(t)\frac{i}{2k}\exp(-ikt) + \theta(-t)\frac{i}{2k}\exp(ikt) \tag{28}$$
$$G_{-f}(t) = -\theta(t)\frac{i}{2k}\exp(ikt) - \theta(-t)\frac{i}{2k}\exp(-ikt) \tag{29}$$
$$G_2(t) = -\theta(-t)\frac{\sin(kt)}{k} \tag{30}$$

となる。$G_{\pm f}$ は文脈によってはファインマンプロパゲータと呼ばれる解である。もとの方程式が実であることを反映して $G_{+f}^* = G_{-f}$ になっている。

以上のように $\pm\epsilon$ を快く思わない諸氏が、佐藤超函数による解決を望む場合、次のような正当化戦略を取れる。

- 件の方程式を佐藤超函数とみなす。
- フーリエ変換する。
- 佐藤超函数の意味でそれを解く。このとき一般に解が複数ありえる。
- フーリエ変換する。このとき $t > 0, t < 0$ と解によって回収できる留数が変わる。

4 結論

極ではなく、積分軌道を動かせ。