

Manes 定理

2016 年 10 月 28 日

概要

[1] に基づく Manes の定理のノート。Manes の定理は次を主張する。ストーン双対の随伴モナドである超フィルターモナドの EM 代数圏はコンパクトハウスドルフ空間の圏に同値である。すなわち、ある集合上の EM 代数は、一つのコンパクトハウスドルフ空間を正確に特徴づける。そのギミックは、超フィルターが位相空間における「収束する近傍系」のように振る舞うこと、そしてコンパクトハウスドルフ性は、その収束先が実際に一意的存在することに対応することによる。

1 ストーン双対と超フィルター

$\mathbf{Set}, \mathbf{BA}$ を集合圏、ブール代数圏とする^{*1}。次の反変関手を考える。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, \{0, 1\}) : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{BA}^{op} \quad (1)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(-, \mathbf{2}) : \mathbf{BA} \rightarrow \mathbf{Set}^{op} \quad (2)$$

但し、 $\{0, 1\}$ は二点集合、 $\mathbf{2}$ は二元ブール代数とする。次は軽量版ストーン双対^{*2}である。

Theorem 1.1. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, \{0, 1\}) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(-, \mathbf{2})$ ただし、 $\mathbf{BA}$ を逆圏にとる。

Proof. 自然同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(A, \mathbf{2}))$ が存在すればよい。 $\mathrm{transpose} \phi, \psi$ を次のように構成する。

$$\phi_{A,S} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\})) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(A, \mathbf{2})) \quad (3)$$

$$f \mapsto \phi(f) = (\lambda s \in S. (\lambda a \in A. f(s)(a))) \quad (4)$$

$$\psi_{S,A} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(A, \mathbf{2})) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\})) \quad (5)$$

$$g \mapsto \psi(g) = (\lambda a \in A. (\lambda s \in S. g(a)(s))) \quad (6)$$

これが集合上の写像として逆演算であることは明らかである。それぞれの準同型としてよく定義されていることも容易に確認できる。

$\phi_{-,S}$ の第一添字に関する自然さとは次のことである。任意の $k : A \rightarrow B$ ブール準同型に対して

$$\phi_{A,S} \circ (\lambda f. f k) = (\lambda g. \mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(k, \mathbf{2}) g) \circ \phi_{B,S} \quad (7)$$

^{*1} ブール代数とは、半順序集合で、二元最大最小 ($\vee, \wedge$) が定義され、これについて吸収律 ($a < b \Rightarrow a \vee b = b, a \wedge b = a$) が成り立ち、 $\vee, \wedge$ について分配的で、最大最小元 ($0, 1$) をもち、また補元演算 $\neg a$ (unique s.t. $\neg a \vee a = 1, \neg a \wedge a = 0$) を持つものである。その準同型は、 $\vee, \wedge, \neg$ を保つ写像である。

^{*2} これを圏同値へ制限したものがある。

$\phi_{A,-}$ の第二添字に関する自然さとは次のことである。任意の $l: S \rightarrow T$ 写像に対して

$$\phi_{A,S} \circ (\lambda f. \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(l, \{0, 1\})f) = (\lambda g. gl) \circ \phi_{A,T} \quad (8)$$

$\psi_{-,A}$ の第一添字に関する自然さとは次のことである。任意の $l: S \rightarrow T$ 写像に対して

$$\psi_{S,A} \circ (\lambda g. gl) = (\lambda f. \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(l, \{0, 1\})f) \circ \psi_{T,A} \quad (9)$$

$\psi_{S,-}$ の第二添字に関する自然さとは次のことである。任意の $k: A \rightarrow B$ ブール代数に対して

$$\psi_{S,A} \circ (\lambda g. \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(k, \mathbf{2})g) = (\lambda f. fk) \circ \psi_{S,B} \quad (10)$$

いずれも単純に従う。 $\square$

随伴がえられたので、そのモナドが直ちに手に入る。

Corollary 1.2. 次は $\mathbf{Set}$ 上のモナドである。

$$\mathcal{U} = \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(-, \mathbf{2}) \circ \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, \{0, 1\}) \quad (11)$$

自然変換のコンポーネントは後述する。

ところで超フィルターとは次のことである。

Definition 1.3. 集合 S 上の超フィルターとは、その部分集合族 $F \subset 2^S$ で、次を満たすものである。

- 任意の $A \subset S$ について、 A, A^c ^{*3}のどちらかが排他的に F に含まれる。
- $A \in F, A \subset B \Rightarrow B \in F$
- $A \in F, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

ところが集合上の全ての超フィルターは、以下のようにストーン双対を構成する反変関手の合成、つまり先のモナド $\mathcal{U}$ で丁度手に入る。そこで以降 $\mathcal{U}$ を超フィルター関手として同一視する。

Proposition 1.4. $\mathcal{U}(S)$ は、 S 上の全ての超フィルターと一対一対応する。

Proof. $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\})$ は冪集合 2^S にほかならないので、集合族上の $\mathbf{2}$ へのブール準同型と超フィルタの一対一対応を示せば良い。次のように構成すれば確認は容易。

$$F \subset 2^S \mapsto m_F = (\lambda A \in 2^S. \text{if } A \in F \text{ then } 1 \text{ else } 0) \quad (12)$$

$$m: 2^S \rightarrow \mathbf{2} \mapsto F_m = \{A \in 2^S \mid m(A) = 1\} \quad (13)$$

$\square$

以下、論証で超フィルターを構成することがあるので、所定の生成元から超フィルターを構成できる十分条件を与えておく。

Definition 1.5. 集合族についての有限交差性 (*FIP*) とは、その集合族の有限個の積 (共通部分のこと) が常に空にならないこととする^{*4}。

^{*3} $(-)^c$ は補集合を表すとする。

^{*4} 超フィルターは空集合を持つことができず、かつ積について閉じるのであきらかに FIP を持っている。

Proposition 1.6. 集合 S 上部分集合族 K が FIP を満たすとき、 K を含む超フィルターが存在する。

Proof. FIP を満たす集合族を K とし、 S 冪集合上の K の上位集合で FIP を満たすものの全体を $\mathcal{C}$ とする。つまり、 K を部分集合とするような FIP 集合族全体が $\mathcal{C}$ である。 $\mathcal{C}$ は包含順序について帰納的である (全順序部分集合の上界は、例えばその全ての和で与えられる) ので、極大元を持つ。これを M とする。明らかに $K \subset M$ である。 M が超フィルターであることを示せば良いが、このために極大性を用いて背理する。

$A \subset B \subset S, A \in M$ のとき、 $B \in M$ でないならば、 $\{B\} \cup M$ を作ると、 B は空でないのだからこれは FIP を満たし、極大性を破れるので $B \in M$ である。

$A, B \in M$ のとき、 $A \cap B \in M$ でないならば、やはりこれも $\{A \cap B\} \cup M$ を考えると、 $A \cap B$ は空でないのだからこれは FIP を満たし、極大性を破れるので $A \cap B \in M$ である。

$A, A^c \subset S$ が $A, A^c \notin M$ だとして。 M は極大なのだから、 $M \cup \{A\}$ を考えるとこれは FIP を満たさなはずである。つまり、ある $B \in M \cup \{A\}$ があって $A \cap B = \emptyset$ 。 $B = A$ の時は、 $A = \emptyset$ となるため $A^c = S \notin M$ となるが、 M は空でなく、すでにその元の上位集合を全てもつとわかっているのだからこれはありえない。 $B \in M$ とすると、 $A \cap B = \emptyset$ より $B \subset A^c$ であり、 M はその元の上位集合をすべて持つので $A^c \in M$ である。これは仮定に反する。従って A, A^c のいずれかは M に入る。 M は超フィルターである。

□

2 超フィルターと収束

フィルターの概念は、位相空間における収束する「近傍系」のような性質を持つ。その雰囲気は定義にも現れている^{*5}が、正確に以下のように主張出来る。

Definition 2.1. 位相空間 X 、 $|X|$ をその忘却した底集合とする。 $|X|$ 上超フィルター F が $x \in X$ に収束するとは、 F が x の開近傍をすべて持つこととする。

Theorem 2.2. 位相空間 X と $|X|$ 上の超フィルター全体 $\mathcal{U}(|X|)$ について、 $U \subset X$ が開集合であることと、 U の点に収束する全ての超フィルターに U が現れることは同値である。

Proof. $\Rightarrow$: U は全てが内点であるので、 U は U の全ての点に対して近傍である。従って $x \in U$ に収束する超フィルターは定義より U をもつ。

$\Leftarrow$: 任意の $x \in U$ に対して、 U に含まれるその開近傍 $x \in U_x \subset U$ が構成できれば、明らかに $\bigcup_x U_x = U$ は開集合になる。これを背理法で示す。ある $x \in U$ に関して、 $U_x \subset U$ となる開近傍が存在しないとする。この時、 x の開近傍全てに、 U^c を加えた集合族は FIP を持つ。なぜならば、 x の開近傍は FIP を持つし、 x の開近傍と U^c の積は、今どんな x の開近傍も U にないと仮定したので空ではないため。するとこの集合族から超フィルターを構成できるが、明らかにこれは x に収束する。ところが今 $x \in U$ 収束超フィルターは U を持つとしたのだから、この超フィルターは U を持たねばならないので矛盾である。したがって $x \in U$ に対する U 上開近傍が存在し、 U は開集合である。

□

これは開集合の性質: U はそのすべてが内点である、つまり U の全ての点に対して U は近傍であるということ を反映している。

^{*5} 例えば近傍系に関するハウスドルフ公理も、上位集合をとることと、有限積について閉じる性質を持つ。

位相空間上、超フィルターの収束性は、今のところ、収束先の存在とその一意性には何も制限がない。ところが、コンパクトハウスドルフ性は、この収束先の存在と一意性に丁度対応する。

Theorem 2.3. X を位相空間とする。 X がコンパクト $\Leftrightarrow |X|$ 上超フィルターが常にひとつ以上の収束先を持つ

Proof. $\Rightarrow$: 背理による。どこへも収束しない超フィルター F があるとする。したがって、各 $x \in X$ について、 F に入らない開近傍 U_x をとれる。 $\bigcup_x U_x = X$ よりこれは開被覆で、コンパクト性から、うち有限のものを取れる。つまり有限集合 I があって、 $\bigcup_{i \in I} U_{x_i} = X$ 。 F は超フィルターでこれらを持たず、かつ FIP なのだから、 $\bigcap U_{x_i}^c = X^c = \emptyset$ を持つことになり、矛盾である。したがって、 F は一つ以上の収束先をもつ。

$\Leftarrow$: 背理による。コンパクトでないとする、ある開被覆 $\mathcal{C}$ で、そのうちのどの有限個でも X を被覆できないものがある。つまり、この開被覆の補集合による集合族は、FIP をもつ。これを含む超フィルター F を作ると、仮定よりこの収束先を取れる。これを x とすると、 x の開近傍は全て F に含まれる。 $\mathcal{C}$ は開被覆なのだから、 $x \in U \in \mathcal{C}$ な U が取れて、これまでの構成から $U^c \in F$ かつ $U \in F$ であり、矛盾である。よって、 X はコンパクト。□

Theorem 2.4. X を位相空間とする。 X がハウスドルフ $\Leftrightarrow |X|$ 上超フィルターが常にひとつ以下の収束先を持つ

Proof. $\Rightarrow$: 背理による。ある超フィルター F が二つ以上の収束先をもつとし、このうち二つを $x, y \in X$ とする。ハウスドルフ性から、 U_x, U_y とこれらの近傍をとって分離でき、かつ F が x, y に収束するとしたので、 $U_x \cap U_y = \emptyset \in F$ となり、矛盾。よって、収束先は高々一つである。

$\Leftarrow$: 背理による。ハウスドルフでないとする。したがって、ある異なる二点 x, y があって、その任意の開被覆の組は共通部分をもつ。したがって、 x, y それぞれの開被覆全ての集合族は FIP をもち、これを含む超フィルター F が存在する。構成から明らかに F は異なる二点 x, y に収束するが、これは仮定に反する。よって、ハウスドルフである。□

Corollary 2.5. X を位相空間とする。 X がコンパクトハウスドルフ $\Leftrightarrow |X|$ 上超フィルターが唯一つの収束先をもつ

前節で、 $\mathcal{U}$ は随伴関手モナドであり、超フィルターと一対一対応する（同一視できる）^{*6}と言った。つまりこれ自体合成された関手であり、それは集合上の写像を、超フィルターから超フィルターへの写像に写す。具体的には次のようになっている。

Definition 2.6. $f : S \rightarrow T$ を集合と写像とする。 $\mathcal{U}(f) : \mathcal{U}(S) \rightarrow \mathcal{U}(T)$ の像要素を押し出し超フィルターと呼ぶ。それは明示的には次のような構成をしたものに等しい^{*7}。

$$\mathcal{U}(f)(F) = \{A \subset T \mid f^{-1}(A) \in F\} \quad (14)$$

超フィルターは収束する「近傍系」のような性質をもつと言ったが、連続性が近傍系や収束点列で定義されるように、超フィルターを用いて連続性を捉えることが出来る。

^{*6} 以下しばしば同一視する。

^{*7} $\mathcal{U}$ はストーン双対の随伴モナドでもあったことを思いだすと、この明示的構成は、超フィルターを冪集合からのブール準同型とみなす言い換えで、 $\text{Hom}_{\mathbf{BA}}(-, \mathbf{2}) \circ \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, \{0, 1\})$ と整合している。特にちゃんと関手である。

Theorem 2.7. X, Y を位相空間とする。 $f : |X| \rightarrow |Y|$ が x で連続 $\Leftrightarrow |X|$ 上超フィルターが x に収束するならば常にその押し出し超フィルターが $f(x)$ に収束する。

Proof. $\Rightarrow$: x 収束する超フィルター F と、 $f(x)$ の開近傍 U' をとる。仮定より*⁸ $f^{-1}(U')$ は x 開近傍を含み、従って $f^{-1}(U') \in F$ 。押し出し超フィルターの定義から $U' \in \mathcal{U}(f)(F)$ である。

$\Leftarrow$: 背理する。仮定の元で、 $f(x)$ の開近傍 U' があって、 $f^{-1}(U')$ が x 開近傍を持たないとする。ここで、 x 開近傍全てにこの逆像補集合 $(f^{-1}(U'))^c$ を加えたものは、FIP をもつ。なぜなら、開近傍の積は開近傍で、 $(f^{-1}(U'))^c$ は空でなく、これと開近傍との積が空であれば、 $f^{-1}(U')$ は開近傍を含むから。そこでここから生成した超フィルター F を考えると、これは明らかに x に収束する。仮定より $\mathcal{U}(f)(F)$ は $f(x)$ に収束するので、 $U' \in \mathcal{U}(f)(F)$ すなわち $f^{-1}(U') \in F$ だが、 F の構成から $(f^{-1}(U'))^c \in F$ だったので矛盾する。したがって、 f は x で連続である。

□

3 Manes の定理

超フィルター関手 $\mathcal{U}$ はモノドであった。このモノドの自然変換コンポーネントを書き出しておこう。

$$\eta_S : S \rightarrow \mathcal{U}(S) \quad (15)$$

$$: s \mapsto \{A \subset S \mid s \in A\} \quad (16)$$

$$\mu_S : \mathcal{U}(\mathcal{U}(S)) \rightarrow \mathcal{U}(S) \quad (17)$$

$$: \mathcal{F} \mapsto \{A \subset S \mid \{F \in \mathcal{U}(S) \mid A \in F\} \in \mathcal{F}\} \quad (18)$$

これが実際にコドメインどおりの超フィルターを与えていることは簡単に確認できる。これがモノドであることは、直接計算して確認しても良いが、 $\mathcal{U}$ がストーン双対の随伴モノドであったのだから、上記の構成がストーン双対関手とその (余) 普遍射からの標準的構成に一致することを見れば十分である。

さてストーン双対の普遍射と余普遍射は次である。

$$\eta_S : S \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\}), \mathbf{2}) \quad (19)$$

$$s \mapsto (\lambda f. f(s)) \quad (20)$$

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_{\mathbf{BA}}(A, \mathbf{2}), \{0, 1\}) \leftarrow A : \epsilon_A \quad (21)$$

$$(\lambda g. g(a)) \leftarrow a \quad (22)$$

η は $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\})$ を S の部分集合とみなせば、上記に一致する。 ϵ も同じくの部分集合の解釈をすると、 $\epsilon_A(a) = \{g \in \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(A, \mathbf{2}) \mid g(a) = 1\}$ と書ける。 μ_S は標準的に次のように水平合成のコンポーネントとして構成され、モノドになる。

$$\mu_S = \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(\epsilon_{\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\})}, \mathbf{2}) \quad (23)$$

$$: \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_{\mathbf{BA}}(\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\}), \mathbf{2}), \{0, 1\}), \mathbf{2}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\}) \quad (24)$$

$$(25)$$

複雑な射であるが、水平合成を追って見よう。まず A をブール代数として、 $\text{Hom}_{\mathbf{BA}}(\epsilon_A, \mathbf{2})$ を考えると、これは $A \rightarrow \mathbf{2}$ ブール準同型の集合上の超フィルターから、 $A \rightarrow \mathbf{2}$ ブール準同型という型になっている。 ϵ_A が

*⁸ ここでは連続性として、開近傍の逆像が開近傍を含むという定義を採用している。

$a \mapsto \{a \text{ を true にする準同型} \}$ と読めることから、

$$\text{Hom}_{\mathbf{BA}}(\epsilon_A, \mathbf{2})(F) = (\lambda a \in A. \text{if } \{g \in \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(A, \mathbf{2}) | g(a) = 1\} \in F \text{ then } 1 \text{ else } 0) \quad (26)$$

である。 $A = \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\})$ において、 μ_S にしよう。すると部分集合としての解釈を差し込んでいけば

$$\mu_S(\mathcal{F}) = (\lambda f \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\}). \text{if } \{g \in \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, \{0, 1\}), \mathbf{2}) | g(f) = 1\} \in \mathcal{F} \text{ then } 1 \text{ else } 0) \quad (27)$$

$$= (\lambda A \subset S. \text{if } \{F \in \mathcal{U} | A \in F\} \in \mathcal{F} \text{ then } 1 \text{ else } 0) \quad (28)$$

$$= \{A \subset S | \{F \in \mathcal{U} | A \in F\} \in \mathcal{F}\} \quad (29)$$

でたしかに上記のものと一致する。したがって、 $\mathcal{U}, \eta, \mu$ はモナドである。

このモナドで Eilenberg-Moore 代数の圏を定義出来る^{*9}。

Definition 3.1. $\mathcal{EM}(\mathcal{U})$ を次の代数たちを対象、準同型を射とする圏とする。 $\mathcal{U}$ 代数とは、**Set** 上の対象 A と射 $k_A : \mathcal{U}(A) \rightarrow A$ の形の射で、

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}(\mathcal{U}(A)) & \xrightarrow{\mathcal{U}(k_A)} & \mathcal{U}(A) & \xrightarrow{k_A} & A \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow k_A & \uparrow \eta_A & \nearrow \text{id}_A \\ \mathcal{U}(A) & \xrightarrow{k_A} & A & & \end{array} \quad (30)$$

を満たすものとする。 $\mathcal{U}$ 準同型とは、 $\mathcal{U}$ 代数の間の射で、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ k_A \uparrow & & \uparrow k_B \\ \mathcal{U}(A) & \xrightarrow{\mathcal{U}(f)} & \mathcal{U}(B) \end{array} \quad (31)$$

を満たすものとする。

そして Manes の定理とは次の主張である。

Theorem 3.2. $\mathbf{CptHaus} \simeq \mathcal{EM}(\mathcal{U})$ 。ただし、**CptHaus** をコンパクトハウスドルフ空間と連続写像による圏とする。

証明の前にこれがどんな対応か考えてみる。圏同値なのだから、双方向への構成が存在する。位相空間において、その底集合上で、超フィルターに収束先が丁度一つ存在することがコンパクトハウスドルフ性と同値だった。これは $\mathcal{U}(|X|) \rightarrow |X|$ という写像が存在することに等しい。従って、右方向の関手は恐らく構成は出来る。逆方向は、今度は $\mathcal{U}$ 代数の構造から、位相を再生する必要がある。ところで位相空間の定義方法にはいくつかの種類があり、次の5つは相互に一意的に位相を決めるのはよく知られている。

- 開集合のなす集合代数。有限積と無限和が定義されて閉じる。連続性はこの opposite な準同型。
- 閉集合のなす集合代数。有限和と無限積が定義されて閉じる。連続性はこの opposite な準同型。
- 開核作用素。集合代数上、冪等、単調、減少的、積について準同型、全集合に対して恒等的。

^{*9} 無論どんなモナドでも同じ定義ができる。

- 閉包作用素。集合代数上、冪等、単調、増加的、和について準同型、空集合に対して恒等的。
- 近傍系。

$\mathcal{U}$ 代数から、このうちいずれかを適切に実装すればいい。[1] は閉包作用素を構成する。

Proof. $\Rightarrow: F : \mathbf{CptHaus} \rightarrow \mathcal{EM}(\mathcal{U})$ を対象について $X \mapsto (|X|, k_X : \mathcal{U}(|X|) \rightarrow |X|)$ ただし、 k_X は位相に基づいて超フィルターの収束先を与える関数とする^{*10}。射についてはそのまま底集合上の写像とする。この対象が $\mathcal{U}$ 代数であることを確認する。まず結合律ダイアグラムについては、

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu_X} & \{A \subset X | \{F \in \mathcal{U}(X) | A \in F\} \in \mathcal{F}\} \\
 \mathcal{U}(k_X) \downarrow & & \downarrow \text{convergence} \\
 \{A \subset X | k_X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\} & \xrightarrow{\text{convergence}} & x?
 \end{array} \tag{32}$$

$\{A \subset X | k_X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ の収束先を x とし、 U をその開近傍とする。 $k_X^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ 、つまり U 上へ収束する全ての超フィルターのなす集合は $\mathcal{F}$ の元であるが、 U は開集合であるため、 U 上に収束する全ての超フィルターに現れる。特に $x \in U$ に収束する超フィルターにも現れるのだから、 $U \in \{A \subset X | \{F \in \mathcal{U}(X) | A \in F\} \in \mathcal{F}\}$ である。 U は任意の開近傍だったから、右上も x に収束することになり、このダイアグラムは可換である。

単位律は、素フィルター $\{A \subset X | x \in A\}$ が x へ収束することから明らかである。

これは確かに関手になっている。なぜならば、連続関数は、超フィルターの押し出しについて、その収束先を保つが、これは $\mathcal{U}$ 代数準同型としての性質にほかならない。

$\Leftarrow: G : \mathcal{EM}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{CptHaus}$ を構成する。そのために位相を定義しなくてはならないので、次の閉包作用素を作る。

Lemma 3.3. $[A] = \{F \in \mathcal{U}(X) | A \in F\}$ とする。すなわち、 $[-]$ は、それを含むような超フィルター集合である。この時 $\mathcal{U}$ 代数 (X, k_X) について、 $cl : 2^X \rightarrow 2^X :: A \mapsto \{k_X(F) | F \in [A]\}$ 、すなわち、集合に対してそれを持つ超フィルターの「収束先」^{*11}集合を返す関数は、クラトウスキ閉包作用素公理を満たす。したがって、位相を定義する。

$$cl(\emptyset) = \emptyset \tag{33}$$

$$A \subset cl(A) \tag{34}$$

$$cl(cl(A)) \subset cl(A) \tag{35}$$

$$cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B) \tag{36}$$

Proof. $(cl(\emptyset) = \emptyset) : cl(\emptyset) = \{k_X(F) | F \in [\emptyset]\} = \{k_X(F) | F \in \emptyset\} = \emptyset$ 。

$(A \subset cl(A)) : \mathcal{U}$ 代数としての単位律から $k_X(\eta_X(x)) = x$ である。 $\eta_X(x)$ は素フィルターであり、したがって、 $x \in A$ であれば $A \in \eta_X$ であり、 $\eta_X(x) \in [A]$ 、すなわち $x \in cl(A)$ である。

$(cl(cl(A)) \subset cl(A)) : x \in cl(cl(A))$ とする。すなわち、ある超フィルター F があって、 $cl(A) \in F, k_X(F) = x$ であるとする。超フィルター上の集合族で、次を考える。

$$k_X^{-1}(F) \cup \{[A]\} \tag{37}$$

^{*10} 位相忘却 $|-|$ は面倒なので以下略す。

^{*11} 収束先というが、まだ位相は定義されていないので k_X の像のことである。

これは FIP を持つことが次のようにわかる。まず $k_X^{-1}(F)$ の有限積は、逆像関数は集合演算について準同型で、 F が超フィルターであるために FIP をもち、さらに $k_X \circ \eta_X = \text{id}_X$ によって k_X が全射であるため、常に空でない。もし $[A] \cap k_X^{-1}(B) = \emptyset$ な $B \in F$ があれば、この補集合は全ての超フィルターであるから、任意の超フィルター F' について、 F' は A をもたない ($F' \notin [A]$) か、 $k_X(F') \notin B$ のどちらかである。ところで今 $k_X(F) = x, cl(A) \in F$ のような F, x をとっていたが、 $cl(A) = \{k_X(F) | F \in [A]\} \in B^c \notin F$ となり $cl(A)^c \in F$ かつ $cl(A) \in F$ となって矛盾である。よって FIP をもつ。

この集合族を用いて超フィルター集合上の超フィルター $\mathcal{F}$ を構成すると、

$$\mathcal{U}(k_X)(\mathcal{F}) = \{B \subset X | k_X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \quad (38)$$

は、 $\mathcal{F}$ は今すべての $k_X^{-1}(B), B \in F$ を持っているので $F \subset \mathcal{U}(k_X)(\mathcal{F})$ しかし超フィルターとしての極大性からこれは一致しなくてはならないので結局 $\mathcal{U}(k_X)(\mathcal{F}) = F$ である。 $\mathcal{U}$ 代数としての結合性を用いて、

$$x = k_X(\mathcal{U}(k_X)(\mathcal{F})) = k_X(\mu_X(\mathcal{F})) \quad (39)$$

ところで $\mathcal{F}$ は構成より $[A]$ をもち、 $\mu_X(\mathcal{F}) = \{B \subset X | [B] \in \mathcal{F}\}$ であるから、 $\mu_X(\mathcal{F})$ は A をもち、特に $\mu_X(\mathcal{F}) \in [A]$ したがって $x = k_X(\mu_X(\mathcal{F})) \in cl(A)$ 。 $x \in cl(cl(A))$ は任意だったので $cl(cl(A)) \subset cl(A)$ 。

$(cl(A \cup B) \subset cl(A) \cup cl(B)) : x \in cl(A \cup B)$ の時、 cl の定義から $A \cup B$ をもつ $k_X(F) = x$ な超フィルター F がある。このとき、 A, B のいずれかは F に含まれる^{*12}。したがって、

$$A \in F \vee B \in F \Rightarrow F \in [A] \vee F \in [B] \Rightarrow k_X(x) \in cl(A) \vee k_X(x) \in cl(B) \quad (40)$$

となり、 $cl(A \cup B) \subset cl(A) \cup cl(B)$ である。

$(cl(A) \cup cl(B) \subset cl(A \cup B)) : x \in cl(A) \cup cl(B)$ の時、同様に A, B どちらかを持つ $k_X(F) = x$ なフィルター F がある。 A, B どちらかを F が持てば、上位集合 $A \cup B$ も持つので、 $A \cup B \in F \Rightarrow F \in [A \cup B] \Rightarrow k_X(F) \in cl(A \cup B)$ である。 $\square$

さて、これによって $\mathcal{U}$ 代数に位相空間を割り当てることが出来る。

この構成が関手であることを確認したい。つまりこの構成による位相空間がコンパクトハウスドルフであり、かつ $\mathcal{U}$ 代数準同型が連続であること示したい。連続性は超フィルターの収束性で評価出来るが、超フィルターの収束性の定義はそのままでは使いにくいので少し書き換える。

Lemma 3.4. X を位相空間とする。任意の $x \in X$ と $|X|$ 上超フィルター F について、 F が x に収束 $\Leftrightarrow$ 各 $A \in F$ について $x \in cl(A)$

Proof. $\Rightarrow$: 背理による。 $A \in F$ があって $x \notin cl(A)$ だとする。このとき $x \in cl(A)^c \subset A^c \in F$ となって矛盾する。

$\Leftarrow$: 背理による。 F が $A \in F \Rightarrow x \in cl(A)$ かつ x の開近傍 U で F に含まれないものがあるとする。この時 U^c は閉集合なので、仮定とあわせて $x \in cl(U^c) = U^c$ しかしこれは矛盾である。 $\square$

したがって、超フィルター収束性 F の収束性は $A \in F, x \in cl(A)$ で評価できる。さらに次のように、 $\mathcal{U}$ 代数から上記の閉包作用素を構成した位相空間の場合は、収束性は実は $k_X(F) = x$ に同値である。これは同時に収束先が k_X で一意的に与えられることから、この位相空間がコンパクトハウスドルフであることも意味する。

^{*12} これを一般化した補題がしばし知られている。超フィルターに所属する集合が、ある有限個の集合に分割出来る（か、和で書ける）場合、そのうちどれか一つは超フィルターに入る。そうでなければこの超フィルターが空集合をもって矛盾する。

Lemma 3.5. (X, k_X) を $\mathcal{U}$ 代数とする。上記の構成による X 上閉包作用素を cl とする。任意の $x \in X$ と $F \in \mathcal{U}(X)$ について、 $k_X(F) = x \Leftrightarrow A \in F, x \in cl(A)$

Proof. $\Rightarrow: k_X(F) = x, A \in F$ ととると、 $F \in [A]$ だから閉包作用素の定義より $x \in cl(A)$ 。

$\Leftarrow$: 超フィルター集合上の集合族として次を用意する。

$$\{[A] | A \in F\} \cup \{k_X^{-1}(\{x\})\} \quad (41)$$

これは FIP を持つ。なぜなら、 $[A] \cap [B] = [A \cap B]$ であってこれは空ではなく^{*13}、また $[A] \cap \{k_X^{-1}(\{x\})\} = \{F' \in \mathcal{U} | k_X(F') = x, A \in F'\}$ もやはり F 自体を要素にもって空ではない。ここから生成した超フィルターを $\mathcal{F}$ とすると、

$$\mu_X(\mathcal{F}) = \{B \subset X | [B] \in \mathcal{F}\} \quad (42)$$

は F の要素を全て持つが、超フィルターとしての極大性から、 $\mu_X(\mathcal{F}) = F$ である。 $\mathcal{U}$ 代数の結合律から、 $k_X(F) = k_X(\mu_X(\mathcal{F})) = k_X(\mathcal{U}(k_X)(\mathcal{F}))$ であるが、ここで

$$\mathcal{U}(k_X)(\mathcal{F}) = \{B \subset X | k_X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \quad (43)$$

は $k_X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$ なのだから、 $\{x\}$ を含む超フィルターである。それは素フィルターにほかならず、 $\mathcal{U}(k_X)(\mathcal{F}) = \eta_X(x)$ であり、 $k_X(F) = k_X(\eta_X(x)) = x$ となる。□

Corollary 3.6. $G : \mathcal{EM}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{CptHaus}$ を、対象に関して位相を上記閉包作用素 cl で与えると、これは関手である。

Proof. $\mathcal{U}$ 代数準同型 $f : X \rightarrow Y$ が構成された位相のもとで連続であることをいう。ところで連続性とは各 $x \in X$ に対して F が x 収束するとき $\mathcal{U}(f)(F)$ が $f(x)$ 収束のことであるが、収束先は k_Y によって $k_Y(\mathcal{U}(f)(F)) = f(k_X(F)) = f(x)$ と計算できて連続である。□

仕上げにこの F, G が対象について本質的に全単射であることをいえばよい。

Lemma 3.7. $GF \simeq \text{id}, FG \simeq \text{id}$

Proof. X をコンパクトハウスドルフ位相空間として、 $GF(X)$ は同じ底集合をもつコンパクトハウスドルフ位相空間であり、 $X, GF(X)$ は $\mathcal{U}$ 代数の構造射を共有しているので、超フィルターの収束性を媒介することで、同じ開集合を持つ^{*14}。従って同相である。

同様に X を $\mathcal{U}$ 代数として、 $FG(X)$ は同じ対象をもつ $\mathcal{U}$ 代数であり、 $X, FG(X)$ は同じ $\mathcal{U}$ 代数構造射を持つことになるので同型である。

したがって、 F, G はともに本質的全単射であり、圏同値である。□

以上で Manes 定理が証明された。□

^{*13} 少なくとも F がある。

^{*14} 開集合であること自体が超フィルター収束性で特徴付けられていることに注意。

4 応用

4.1 Manes の拡張

コンパクトハウスドルフという性質が $\mathcal{U}$ 代数構造に完全に対応しているため、Manes を拡張してコンパクトハウスドルフ性を外してしまうとこの構造は損なわれる。ところが [1] によると Barr の定理というのがあり、 $\mathcal{U}$ を集合圏ではなく、二項関係の圏 **Rel** へ拡張し、これを 2 圏とみなして、 $\text{lax-}\mathcal{U}$ 代数を考えることで、位相空間全体 **Top** に圏同値を拡大できるらしい。

4.2 ストーン-チェックコンパクト化

ストーン-チェックコンパクト化は、普遍性をもつコンパクト化の一つで、位相空間をコンパクトハウスドルフ空間へ連続に写像するもののうち最も普遍的なものである。

Definition 4.1. 位相空間 X のストーン-チェックコンパクト化とは^{*15}、コンパクト空間 $i: \beta X$ への連続写像 $X \rightarrow \beta X$ で、次の普遍性を持つものである。任意のコンパクト空間 C と連続写像 $f: X \rightarrow C$ に対して、次を可換にする唯一の連続写像 $\hat{f}$ がある。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \beta X \\ & \searrow f & \downarrow \hat{f} \\ & & C \end{array} \quad (44)$$

さて、これはコンパクトハウスドルフ空間の圏 **CptHaus** から位相空間の圏 **Top** への埋め込み関手 $\iota: \mathbf{CptHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ があることを考えると、 ι 普遍射のことにほかならない。例えば、 ι の左随伴が存在したら、それはストーン-チェックコンパクト化の構成関手である。

これと超フィルターモナドと一体どんな関係があるだろうか？ 超フィルターモナドはストーン双対の随伴モナドとして分解できたが、別の分解を与える事もできる。

まず、位相空間の集合代数を抽象化したフレームを定義する。

Definition 4.2. フレームとは、半順序集合で、部分集合にたいして上限と、有限集合に対して下限を取ることができ $(\vee, \wedge)$ 、 $\vee, \wedge$ に関する分配束が成り立つものとする。フレームの準同型とは、これらの演算を保つ単調写像とし、フレームの成す圏を **Frm** とする。

ブール代数と異なるのは、補元が取れる保障がないことと、和に関して任意個のそれが取れることである。フレームは位相の開集合代数の抽象化なのだから、位相空間の圏からフレームの圏へは反変関手がとれる。これを含めて以下の関手を考えよう。

^{*15} ここでの定義は、ゆるい方で、場合によっては、位相空間 X がもう少し性質をもっている前提であったり、連続写像 i が埋め込みでなくてはならないと言った条件が課される場合がある。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathbf{2}) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Frm}^{op} \quad (45)$$

$$:: (X, \mathcal{O}_X) \mapsto \mathcal{O}_X \quad (46)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(-, \mathbf{2}) : \mathbf{Frm} \rightarrow \mathbf{Set}^{op} \quad (47)$$

$$:: X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathbf{2}) \quad (48)$$

$$F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top} \quad (49)$$

$$:: S \mapsto (S, 2^S) \quad (50)$$

$$U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (51)$$

$$:: (X, \mathcal{O}_X) \mapsto X \quad (52)$$

上から、位相の集合代数としてのフレームを取り出す関手^{*16}、フレームとしての $\mathbf{2}$ へのホム関手^{*17}、離散位相空間を構成する関手、そして忘却関手である。これらは随伴をなす。

Theorem 4.3. $F \dashv U, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathbf{2}) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(-, \mathbf{2})$ ただし、 $\mathbf{Frm}$ を逆圏にとる。

Proof. 離散位相が、そこからの任意の位相空間への写像を連続にするのはよく知られている。 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, U(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(F(S), X)$ は簡単に確認できる。もう一つの随伴はストーン双対のときと全く同じ構成でカーリー化を行えばよい。□

随伴は合成出来るので、ここには次の随伴も存在する。

Lemma 4.4. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathbf{2}) \circ F \dashv U \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(-, \mathbf{2})$

そしてこれこそが超フィルターモナド $\mathcal{U}$ のもう一つの随伴分解である。

Lemma 4.5. $\mathcal{U} \simeq U \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(-, \mathbf{2}) \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathbf{2}) \circ F$

Proof. F が冪集合をとってくれているので、離散位相の集合代数上のフレーム準同型を取ることが実質的に超フィルターを選ぶことであることを示せばよい。しかし、 $\mathbf{2}$ へのフレーム準同型は $1 \in \mathbf{2}$ の逆像で決まり、これについて、フレームの $\vee$ は冪集合上、上位集合をとることについて閉じること、 $\wedge$ は FIP にほかならず、これは超フィルターそのものである。□

さて、Eilenberg-Moore 圏は、そのモナドのなす随伴圏における終対象であった。正確には次の意味である^{*18}。

Theorem 4.6. (T, μ, η) を $\mathbb{C}$ 上のモナドとする。「自由代数」関手 $F^T : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{EM}(T) :: A \mapsto (TA, \mu_A)$ 、および「忘却」関手 $G^T : \mathcal{EM}(T) \rightarrow \mathbb{C} :: (A, k_A) \mapsto A$ は随伴 $F^T \dashv G^T$ をなし、これは次の意味の普遍性をもつ。 $\mathbb{C}$ 上の任意の随伴関手対 $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}, G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, F \dashv G$ に対して、これが標準的構成によってモナド

^{*16} 位相空間として $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\})$ への連続写像を考えると、これはドメインの開集合と同一視出来る。

^{*17} ただし、この時集合としての $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathbf{2})$ に、各 $x \in X$ について $ev_x : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathbf{2}) \rightarrow \mathbf{2} :: f \mapsto f(x)$ を連続にする最弱位相を入れるとする。この $\mathbf{2}$ は位相空間としての $\mathbf{2}$ で、これは $\{\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(X, \mathbf{2}) | f(x) = 1, x \in X\}\}$ を開集合としていることに等しい。

^{*18} これらはモナド、及びコモナドに関する完全な一般論である。随伴圏とは、圏の組とその間の随伴関手を対象とし、これらの圏の間の関手の組で、普遍射、余普遍射自然変換を移すものを射とする圏であり、ここでは固定された圏上のモナドを分解する随伴関手のなすその部分圏を考える。Eilenberg-Moore 圏、および Kleisli 圏は、モナドが定義されている圏との間に随伴をもつことでこの圏の対象となり、かつそれぞれ終対象、始対象である。

(T, μ, η) を再生する (すなわち $T = GF, \eta = \eta, \mu = G\epsilon F$) とき、ただ一つの関手 $B : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{EM}(T)$ があって、 $G^T B = G, F^T = BF$ を満たす。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{D} & \\
 B \swarrow & \downarrow G & \searrow F \\
 \mathcal{EM}(T) & \xrightarrow[\perp]{\perp} & \mathbf{C} \xrightarrow{T} \mathbf{C}
 \end{array}
 \quad (53)$$

さて、Manes の定理より、 $\mathcal{U}$ の Eilenberg-Moore 圏は **CptHaus** に同値であった。この $\mathcal{U}$ は今、フレーム圏 **Frm** やブール代数圏 **BA** との間の分解を持っているので、それらの圏から一意的に **CptHaus** $\simeq \mathcal{EM}(\mathcal{U})$ への関手が取れて、上記のようなダイアグラムが可換になる。つまり以下のような状況が直ちに生じる。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{Frm}^{op} & & \\
 & B \swarrow & \downarrow \text{Hom} & \downarrow \text{Hom} & \\
 & & \mathbf{Top} & & \\
 & \downarrow & \downarrow F & \downarrow U & \\
 \mathbf{CptHaus} \xrightarrow{\sim} \mathcal{EM}(\mathcal{U}) & \xrightarrow[\top]{G^{\mathcal{U}}} & \mathbf{Set} & \xrightarrow{\mathcal{U}} & \mathbf{Set} \\
 & \uparrow F^{\mathcal{U}} & \uparrow \text{Hom} & \uparrow \text{Hom} & \\
 & & \mathbf{BA}^{op} & &
 \end{array}
 \quad (54)$$

ここで得られる関手 $B : \mathbf{Frm}^{op} \rightarrow \mathcal{EM}(\mathcal{U}) \simeq \mathbf{CptHaus}$ を用いて、

$$\beta = B \circ \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathbf{2}) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CptHaus} \quad (55)$$

を構成する。これは位相空間の圏からコンパクト位相空間の圏への関手であり、コンパクト化を与えるかのように見える。が、**実はそこまでは言えないらしい**。 ι 普遍性にかかなり近い所まで接近はする。

Theorem 4.7. β はストーン-チェックコンパクト化に**近い**。つまり、 $\beta \dashv \iota$ **っぽい**。

Proof. まずこの B, β がどんなものなのか観察しよう。Eilenberg-Moore 圏の普遍性において、具体的な普遍関手は次のように構成すればよい^{*19}。 $F \dashv G$ を随伴関手対、 ϵ をその余普遍射自然変換とする。

$$B : A \mapsto (GA, G(\epsilon_A)) \quad (56)$$

今 **Set**, **Frm**^{op} 間の随伴の余普遍射自然変換コンポーネントは、次のようなものである。

$$\epsilon_A : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_{\mathbf{Frm}}(A, \mathbf{2}), \{0, 1\}) \quad (57)$$

$$a \mapsto (\lambda f. f(a)) \quad (58)$$

すると、 $X \in \mathbf{Top}$ に対する β の像 $(G(\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathbf{2})), G(\epsilon_{\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathbf{2})}))$ は、まず対象について、

$$G(\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathbf{2})) = \text{Hom}_{\mathbf{Frm}}(\mathcal{O}_X, \mathbf{2}) \quad (59)$$

^{*19} けどいが、これはモナドの一般論であり、これに限った話ではない。

は開集合のなすフィルターである^{*20*21}。そして代数構造射は、

$$\epsilon_{\text{HomTop}(X, \mathbf{2})} : \mathcal{O}_X \rightarrow \text{HomSet}(\text{HomFrm}(\mathcal{O}_X, \mathbf{2}), \{0, 1\}) \quad (60)$$

$$:: S \in \mathcal{O}_X \mapsto (\lambda f \in \text{HomFrm}(\mathcal{O}_X, \mathbf{2}). f(S)) \quad (61)$$

これは開集合をとって、開集合上のフィルターにたいして、選んだ開集合がそこに入るかどうかの判定をする関数を返す関数である。これを G に通した $G(\epsilon_{\text{HomTop}(X, \mathbf{2})})$ は、開集合上フィルター上の超フィルターから開集合上のフィルターを返す。つまり $\mathcal{U}$ 代数として、フィルターの「収束」概念を与えているものである。

さて、示したい (?) のは、この構成が左随伴として相応しい性質を **ある程度もちそう** ということであるが、具体的に β の像が ι 普遍射としての性質を持つかどうかを見よう。 $i_X : X \rightarrow \iota(\text{HomFrm}(\mathcal{O}_X, \mathbf{2}))$ を $x \in X$ に対して、 x の開近傍フィルターを返す写像として、これを普遍射に見立てる。 $f : X \rightarrow \iota C$ を任意のコンパクト空間への連続写像とする。この時、

$$\text{HomFrm}(f^{-1}, \mathbf{2}) : \text{HomFrm}(\mathcal{O}_X, \mathbf{2}) \rightarrow \text{HomFrm}(\mathcal{O}_C, \mathbf{2}) \quad (62)$$

を考えよう。ドメインはちゃんと今構成した空間だが、このコドメインはまだ C の点ではない。しかし C はコンパクトハウスドルフ空間であるから、任意の超フィルターを収束させる事ができる。しかししかし、このコドメインはフィルターであって、超フィルターではない。しかししかししかし、フィルターは FIP を持つのだからこのフィルターを超フィルターへ格上げできる。しかししかししかししかし、FIP な族から超フィルターの構成は、単に極大元をとるだけだったが、極大元は一意的とは限らない。したがって、この構成は、 ι 普遍性の一歩手前まで止まっていて、本当にストーン-チェックコンパクト化なのかわからない。残念でした。□

参考文献

[1] Marius Stekelenburg, Ultrafilters and Topology (2014)

^{*20} 超フィルターではない。すなわち、FIP と上位集合について閉じてはいるが、任意の部分集合についてそれか補集合が含まれるという性質は保証されない。

^{*21} 直観的には、このフィルターは「点のように振る舞う」要素として扱われる。したがって、コンパクト化の結果得られる位相空間の底集合は、もとの空間上のフィルターである。