

Squeeze 変換と線形正準変換

@phykm

June 27, 2021

Abstract

先日 Twitter で、実軸上関数空間に対する正準線形変換 (LCT)¹という積分変換が話題になっているのを見かけた。追ってみると、これはフーリエ変換を含む様々な積分変換を一般化して統合するものだという。ところで、この Wikipedia のページにある変換の例を見る限り、これは量子力学での Bogoliubov 変換 (の 1 次元版:Squeeze 変換) そのものように思われ、実際 LCT のうち複素係数を用いる ($L^2(\mathbb{R})$ の自己同型にはならない) ようなものを除けば、群構造も Squeeze 変換のそれに似ている。そこで、LCT の (実係数の場合の) 一般論が、量子力学を齧った人から見た場合にどのように位置づけられるかを考察してみる。

1 量子力学から

量子力学からは次の基本的事実を使う。

命題 1.1. $L^2(\mathbb{R})$ 上量子的調和振動子のハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}X^2 \quad (1)$$

とする。ただし、 $P = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ とし、 X は位置 x の掛け算作用素とする。²このハミルトニアンのスペクトルは離散的で、それは

$$n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

である。

命題 1.2. ラダーオペレータを

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP) \quad (3)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP) \quad (4)$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_canonical_transformation

²質量、プランク定数、周波数などの各種定数はここでは意味をなさないので全て 1 としている。

とすると、

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad (5)$$

であり、固有ベクトル $|n\rangle$ に対して

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (6)$$

$$a|0\rangle = 0 \quad (7)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (8)$$

を満たす。 $|0\rangle$ は $av = 0$ を満たすような、定数倍を除いて唯一の v である。

2 Squeeze 変換

Squeeze 変換は、Bogoliubov 変換の特殊な場合 (1 次元 Fock 空間の場合) である。Bogoliubov 変換は、Fock 空間のラダーオペレータを、それらの線形結合に移すようなユニタリ変換を指す。Boson Fock 空間は、本来ならば、 $F(A)$ 任意のヒルベルト空間 A に対して定義することができる。 $L^2(\mathbb{R})$ 上に、調和振動子ハミルトニアン H の離散スペクトル展開があることによって、 $L^2(\mathbb{R}) \simeq l^2$ であり、 l^2 は $F(\mathbb{C})$ と同型である。Fock 空間のより一般的な Bogoliubov 変換とその全貌については筆者は長年考察しているのだが、これはここで書くと諸々が破滅してしまうので、ここでは 1 次元の Bogoliubov 変換、つまり Squeeze 変換についてまとめる。³

定義 2.1. $L^2(\mathbb{R}) \simeq l^2 \simeq F(\mathbb{C})$ 上のユニタリ変換 U のうち、次を満たすものを Squeeze 変換とする。

$$\exists x, y \in \mathbb{C} \quad (9)$$

$$UaU^\dagger = xa + ya^\dagger \quad (10)$$

$$Ua^\dagger U^\dagger = x^\dagger a^\dagger + y^\dagger a \quad (11)$$

Squeeze 変換がなす群を Sq と書くことにする。

以下、 X, P, a, a^\dagger に対するこうした線形変換を記述するために、以下のような行列記法を用いる。

$$U \begin{bmatrix} a \\ a^\dagger \end{bmatrix} U^\dagger = \begin{bmatrix} x & y \\ y^\dagger & x^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^\dagger \end{bmatrix} \quad (12)$$

この群が実質的に $SL(2, \mathbb{R})$ をなすことを示す。

命題 2.2. U が Squeeze 変換のとき、上記の x, y は $|x|^2 - |y|^2 = 1$ を満たす。

³Squeeze 変換をなぜ Squeeze と呼ぶのかの 1 つの直感的解釈は、 X, P の相空間 (例えば Wigner 関数表示を考えればよい) において、この変換が波束を潰したり伸ばしたりするように振る舞うことが挙げられる。これに対して Coherent 発振 (Coherent 状態を作るユニタリ変換) は波束の位置を動かす変換である。ラダー 1 次の生成子のユニタリが波束の位置を、ラダー 2 次の生成子のユニタリが波束の変形をもたらすと考えることができる。

Proof. $UaU^\dagger, Ua^\dagger U^\dagger$ が通常の正準交換関係を満たすことから。
 a と a^\dagger の定義を用いて、 X, P でこれを書き直すと次のようになる。

$$UXU^\dagger = (\text{Re}x + \text{Re}y)X + (-\text{Im}x + \text{Im}y)P \quad (13)$$

$$UPU^\dagger = (\text{Im}x + \text{Im}y)X + (\text{Re}x - \text{Re}y)P \quad (14)$$

行列で書けば

$$U \begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} U^\dagger = \begin{bmatrix} \text{Re}x + \text{Re}y & -\text{Im}x + \text{Im}y \\ \text{Im}x + \text{Im}y & \text{Re}x - \text{Re}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} \quad (15)$$

U に対して決まる、この X, P への実行列係数を M_U と書くことにする。これは $SL(2, \mathbb{R})$ の要素になっている。

命題 2.3. *Squeeze* 変換 U に対応する係数 x, y について

$$M_U = \begin{bmatrix} \text{Re}x + \text{Re}y & -\text{Im}x + \text{Im}y \\ \text{Im}x + \text{Im}y & \text{Re}x - \text{Re}y \end{bmatrix} \quad (16)$$

で定義すると、 $M_U \in SL(2, \mathbb{R})$ である。

Proof. 直接計算による。

さらにこの対応は乗法的にとれる。

命題 2.4. $F : \text{Sp} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ を、次の写像で定義すると、これは群準同型になる。

$$U \mapsto M_U^{-1} \quad (17)$$

Proof. $U, V \in \text{Sq}$ とすると、

$$VU \begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} U^\dagger V^\dagger = M_U M_V \begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} \quad (18)$$

したがって、 $M_{VU} = M_U M_V$ であり、 $F(VU) = M_V^{-1} M_U^{-1} = F(V)F(U)$ である。

したがって、今 *Squeeze* 群から $SL(2, \mathbb{R})$ への準同型があることになる。この \ker は $U(1)$ である。 $U \mapsto M_U$ の対応は、係数 x, y にのみ依存しているから、 U 自体が $e^{i\theta}$ 変わったとしても M_U には影響しない。

この点を踏まえた上で、逆を考える。つまり、 $x, y \in \mathbb{C}$ から対応する *Squeeze* 変換を、 $U(1)$ 不定性を除いて一意的に構成する。

Boson Fock 空間の特徴づけとして、それが一意的な真空 ($|0\rangle \in \ker a$ のこと) を持ち、この真空とラダーオペレータについて巡回的なヒルベルト空間 ($a^{\dagger n}|0\rangle$ が稠密) というものがある。この心は、一意的な真空を用意すれば、ラダーオペレータを使って、任意の $|n\rangle$ を張っていけるという点にある。

$L^2(\mathbb{R}) \simeq l^2 \simeq F(\mathbb{C})$ は 1 次元自由度の場合の Boson Fock 空間だから、同じ戦略を取ることができる。 $M \in SL(2, \mathbb{R})$ に対して

$$M = \begin{bmatrix} \text{Re}x + \text{Re}y & -\text{Im}x + \text{Im}y \\ \text{Im}x + \text{Im}y & \text{Re}x - \text{Re}y \end{bmatrix} \quad (19)$$

による $x, y \in \mathbb{C}$ を用いて

$$a_M = xa + ya^\dagger \quad (20)$$

とする。これは正準交換関係を満たす。これについて、 $\ker a_M$ が $U(1)$ 定数倍を除いて一意的である事を示せたとし、これを $|0_M\rangle$ とする。

$$|n_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a_M^{\dagger n} |0_M\rangle \quad (21)$$

として $\{|n_M\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ を定義し、

$$U_M : |n\rangle \mapsto |n_M\rangle \quad (22)$$

でユニタリを定義すると、これは

$$U_M a U_M^\dagger = xa + ya^\dagger \quad (23)$$

$$U_M a^\dagger U_M^\dagger = x^\dagger a^\dagger + y^\dagger a \quad (24)$$

を満たす。すなわち、 $M \in SL(2, \mathbb{R})$ に対して Squeeze 変換 U_M を構成できることになる。この不定性は $\ker a_M$ の $U(1)$ 不定性である。したがって、 $F : \text{Sq} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ は全射であり、準同型定理が適用になる。

$|0_M\rangle = \ker a_M$ の具体的な構成は次のようにすればよい。これは $a_M |0_M\rangle = 0$ の漸化式を解くことで求められる。

$$|0_M\rangle = e^{i\theta} \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{n \geq 0} \sqrt{\frac{(2n-1)!!}{2n!!}} \left(\frac{-y}{x}\right)^{2n} |2n\rangle \quad (25)$$

結果的に次がえられる。

定理 2.5. $\text{Sq}/U(1) \simeq SL(2, \mathbb{R})$

3 LCT

Squeeze 変換を調和振動子の固有ベクトルに対して実行できても面白くない⁴。LCT の群構造と Squeeze 変換の群構造はよく似ているので、Squeeze 変換を $L^2(\mathbb{R})$ 上の積分変換として表示することができれば、LCT になるのではないかと予想が立つ。

Wikipedia によると⁵LCT の積分変換の定義は次のようになっている。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (26)$$

⁴嘘。物理屋的にはめっちゃ面白い。しかしここでは LCT を再現することを主題とする。

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_canonical_transformation

として、

$$X_{(a,b,c,d)}(u) = \sqrt{\frac{1}{ib}} e^{i\pi \frac{d}{b} u^2} \int dt e^{-i2\pi \frac{1}{b} ut} e^{i\pi \frac{a}{b} t^2} x(t) dt \quad (27)$$

Squeeze 変換が、この LCT をカバーしていることを検証してみよう。

一般の $SL(2, \mathbb{R})$ に対応する Squeeze 変換の積分核表示を一発で求めるのは大変なので、次のようにする。まず、 $SL(2, \mathbb{R})$ の要素を、次のように LDU 分解できる。

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

前節での準同型 $F : \text{Sq} \rightarrow SL(2, \mathbb{R}), U \mapsto M_U^{-1}$ について、

$$F(U_3(\gamma)) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$F(U_2(\beta)) = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$F(U_1(\alpha)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

となるような、 U_i を見つけ、それらを合成することを考える。そうすれば、

$$F(U_3(\gamma)U_2(\beta)U_1(\alpha)) = M \quad (32)$$

となる。この $U_3(\gamma)U_2(\beta)U_1(\alpha)$ を $L^2(\mathbb{R})$ への作用として計算すれば、LCT が再現されるだろう、という寸法である。 U_i は単純な形をしているはずなので、その $L^2(\mathbb{R})$ 作用も比較的単純な変換で済むはずである。

U_i を見つけるため、まず Sq の指数写像を計算しておく。天下りだが、次の実リ一代数を考える。 $SL(2, \mathbb{R})$ が 3 次元であり、Squeeze 群との差が $U(1)$ であることを考えると次元は合っている。

定義 3.1. \mathfrak{sq} を次が張る実係数リ一代数とする。

$$\frac{1}{2} (a^2 - a^{\dagger 2}), \frac{1}{2i} (a^2 + a^{\dagger 2}), -ia^{\dagger}a, i \quad (33)$$

ここですべての \mathfrak{sq} の元は反エルミートである。そこで、この指数写像ユニタリを形式的に計算する。 $s \in \mathfrak{sq}$ の指数写像 $\exp(s)$ を考える。収束性を緩やかに考えた場合

$$\exp(s)a \exp(s)^{\dagger} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} [s, -]^n a \quad (34)$$

であるので、これが具体的にどのような $SL(2, \mathbb{R})$ に対応する Squeeze 変換を与えるかは、 \mathfrak{sq} の一般項の交換子を計算できればよい。頑張ってこの級数を計算すると次がえられる。

命題 3.2.

$$s = A \frac{1}{2} (a^2 - a^{\dagger 2}) + B \frac{1}{2i} (a^2 + a^{\dagger 2}) - C i a^{\dagger} a + D i \quad (35)$$

と置いた時、

$$\exp(s) a \exp(s)^{\dagger} = \left(\cosh(\eta) + \frac{iC \sinh(\eta)}{\eta} \right) a + \left(\frac{(A + iB) \sinh(\eta)}{\eta} \right) a^{\dagger} \quad (36)$$

ここで

$$\eta = \sqrt{A^2 + B^2 - C^2} \quad (37)$$

とし、もし平方内が負ならば虚軸正方向をとる。

このときの $SL(2, \mathbb{R})$ の対応する成分は

$$M_{\exp(s)} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) + \frac{\sinh(\eta)}{\eta} A & \frac{\sinh(\eta)}{\eta} (B - C) \\ \frac{\sinh(\eta)}{\eta} (B + C) & \cosh(\eta) - \frac{\sinh(\eta)}{\eta} A \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$F(\exp(s)) = M_{\exp(s)}^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) - \frac{\sinh(\eta)}{\eta} A & -\frac{\sinh(\eta)}{\eta} (B - C) \\ -\frac{\sinh(\eta)}{\eta} (B + C) & \cosh(\eta) + \frac{\sinh(\eta)}{\eta} A \end{pmatrix} \quad (39)$$

である。

3.1 $U_1(\alpha)$ について

$F(\exp(s))$ の様子を考えると、これが下三角行列になるのは $A = 0, C = B$ の時である。この条件下での指数写像は

$$\exp \left(B \left(\frac{1}{2i} (a^2 + a^{\dagger 2}) - i a^{\dagger} a \right) \right) \quad (40)$$

$$= \exp \left(-iB \left(X^2 + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (41)$$

であり、対応する $SL(2, \mathbb{R})$ は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2B & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

である。よって、 $B = -\frac{1}{2}\alpha$ として

$$U_1(\alpha) = \exp \left(i \frac{\alpha}{2} \left(X^2 + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (43)$$

とする。 X が掛け算作用素であることを考えると、この $L^2(\mathbb{R})$ への作用は容易である。

$$U_1(\alpha)[f](x) = \exp \left(i \frac{\alpha}{2} \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \right) f(x) \quad (44)$$

3.2 $U_2(\beta)$ について

$F(\exp(s))$ の様子を考えると、これが対角行列になるのは $B = 0, C = 0$ の時である。この条件下での指数写像は

$$\exp\left(A\left(\frac{1}{2}(a^2 - a^{\dagger 2})\right)\right) \quad (45)$$

$$= \exp\left(\frac{iA}{2}(XP + PX)\right) \quad (46)$$

であり、対応する $SL(2, \mathbb{R})$ は、

$$\begin{bmatrix} \exp(-A) & 0 \\ 0 & \exp(A) \end{bmatrix} \quad (47)$$

である。よって、 $A = -\log \beta$ として

$$U_2(\beta) = \exp\left(\frac{-i \log \beta}{2}(XP + PX)\right) \quad (48)$$

である。しかし、 $XP + PX$ とは一体どんな作用だろうか？ この形ではこの作用が単純であるようには見えない。実はこれはウェーブレット変換でのスケーリングの生成子である。次の変換 $W(t)$ を考えよう。

$$W(t)[f](x) = \sqrt{e^t} f(xe^t) \quad (49)$$

t が十分に小さいとき、

$$W(t)[f](x) = \left(1 + \frac{1}{2}t\right) \left(f(x) + xt \frac{d}{dx}\right) \quad (50)$$

$$= \left(1 + t \left(\frac{1}{2} + x \frac{d}{dx}\right)\right) f(x) \quad (51)$$

$$= \left(1 + t \frac{i}{2}(XP + PX)\right) f(x) \quad (52)$$

となる。つまり、 $i(XP + PX)$ はスケーリング変換の生成子だった。したがって、 $U_2(\beta)$ はこれにならって次のように動作する。

$$U_2(\beta)[f](x) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} f\left(\frac{x}{\beta}\right) \quad (53)$$

3.3 $U_3(\gamma)$ について

$F(\exp(s))$ の様子を考えると、これが上三角行列になるのは $A = 0, C = -B$ の時である。この条件下での指数写像は

$$\exp\left(B\left(\frac{1}{2i}(a^2 + a^{\dagger 2}) + ia^{\dagger}a\right)\right) \quad (54)$$

$$= \exp\left(iB\left(P^2 + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (55)$$

であり、対応する $SL(2, \mathbb{R})$ は、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

である。よって、 $B = -\frac{1}{2}\gamma$ として

$$U_3(\gamma) = \exp\left(-i\frac{\gamma}{2}\left(P^2 + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (57)$$

とする。この変換は、位置表示では $L^2(\mathbb{R})$ への作用としては解釈しづらい。そこで、一度フーリエ変換を媒介し、運動量領域での作用を考える。すると、

$$U_3(\gamma)[f](y) = \frac{1}{2\pi} \int dp \int dx \exp\left(ipx - ipy - i\frac{\gamma}{2}\left(p^2 + \frac{1}{2}\right)\right) f(x) \quad (58)$$

である。そしてここからが巧妙な点である。この状態では積分が2段になっており、LCT が想定する積分変換の形になっていない。 f にある程度のたちの良さを想定し、積分順序を交換しよう。 dp を先に実行する。このときガウス積分によって、 p^2 項を消すことができる。

$$\frac{1}{2\pi} \int dp \int dx \exp\left(ipx - ipy - i\frac{\gamma}{2}\left(p^2 + \frac{1}{2}\right)\right) f(x) \quad (59)$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int dx \exp\left(\frac{ix^2}{2\gamma} - \frac{ixy}{\gamma} + \frac{iy^2}{2\gamma} - \frac{i\gamma}{2}\right) f(x) \quad (60)$$

これは f への掛け算作用素、フーリエ変換、および変換後の変数に対する掛け算作用素の形になっている。

最終的には $F(U_3(\gamma)U_2(\beta)U_1(\alpha))$ は、

- $\exp(iX^2)$ 型の掛け算作用素
- スケーリング変換
- フーリエ変換
- (変換後の変数についての) $\exp(iX^2)$ 型の掛け算作用素
- 定数倍 ($U(1)$: これは無視してよいだろう)

を合成したものになっている。LTC の公式 (27) と比較すると、パラメータのとり方は異なるものの、 $U(1)$ を除いてほぼ同様の変換の合成になっていることがわかる。具体的に (27) との係数対応は... めちゃめちゃめんどくさそうなので略す(えっ)