

# ラプラス・z 変換

@phykm

February 28, 2021

## Abstract

ざっくりとした計算でラプラス・z 変換とはなんだったのか?をまとめる。

## 1 ラプラス変換

### 1.1 定義

定義 1.1.  $L^2(\mathbb{R}_+)$  を、非負実数上の 2 乗可積分関数のなすヒルベルト空間とする。

定義 1.2.  $H_h^2$  を、複素平面上、実成分が正の領域で定義される正則関数に次のノルムを入れて完備化したものとする。

$$\|\phi\|^2 = \sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy |\phi(x+iy)|^2 \quad (1)$$

定義 1.3. 次をラプラス変換  $\mathcal{L}$ 、および逆ラプラス変換  $\mathcal{L}^\dagger$  とする。

$$\mathcal{L}: L^2(\mathbb{R}_+) \leftrightarrow H_h^2: \mathcal{L}^\dagger \quad (2)$$

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-zt) f(t) \quad (3)$$

$$\mathcal{L}^\dagger[\phi](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_x} dz \exp(zt) \phi(z) \quad (4)$$

ここで、積分軌道  $I_x$  は、 $x+iy$  ( $y \in \mathbb{R}$ ) の上向き軌道とする。ただし、ここではまだ“逆”というのは本当に逆か分かっていない。また、それぞれのノルムについて整合的かも示していない。これを以下で示していく。

### 1.2 ナイーブな同型性

まず、素朴な意味での  $\mathcal{L}^\dagger \mathcal{L} = \text{id}, \mathcal{L} \mathcal{L}^\dagger = \text{id}$  を示す。素朴な意味とは、被積分関数についての滑らかさや有界性などのたちの良さを仮定した場合に、それぞれの関数空間で、変換逆変換によって各点の値が回復することとする。実際には、変換のドメインもコドメインも完備化した関数空間として定義されているため、このようなたちの良い関数から初めて完備化をする必要があり、これによってノルム同型とするためには、さらにこれらの変換の等長性が必要になる。これは後で示す。

**補題 1.4.** フーリエ変換の積分核は、 $\mathbb{R}$  上たちのよい関数に対してデルタ関数として振る舞う。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \exp(it y) = \delta(y) \quad (5)$$

$\mathcal{L}^\dagger \mathcal{L} = \text{id}$  はこれより比較的素直に従う。

**命題 1.5.** たちのよい  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$  について  $\mathcal{L}^\dagger [\mathcal{L}[f]] = f$

*Proof.*

$$\mathcal{L}^\dagger [\mathcal{L}[f]](t) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}_+} ds \exp(-(x+iy)(s-t)) f(t) \quad (7)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} ds \delta(s-t) f(t) \quad (8)$$

$$= f(t) \quad (9)$$

**補題 1.6.**  $H_h^2$  の要素のフーリエ変換は負周波数成分をもたない。すなわち、次が成り立つ。 $\phi \in H_h^2, t > 0$  のとき

$$\int_{\mathbb{R}} dy \exp(-iyt) \phi(x+iy) = 0 \quad (10)$$

*Proof.* この積分を次の複素積分として再解釈する。

$$\int_{I_x} \frac{dz}{i} e^{xt} \exp(-zt) \phi(z) \quad (11)$$

軌道の右側に無限遠半円弧を追加することによって、右半面での正則性からゼロである。追加した半円弧は無限遠に行くにつれてその寄与は小さくなり積分に影響しない<sup>1</sup>。

**命題 1.7.**  $\mathcal{L} [\mathcal{L}^\dagger [\phi]] = \phi$

*Proof.*  $z = x + iy$  において、この実部  $x$  を  $\mathcal{L}^\dagger$  を計算する積分軌道の実部と一致させる。すると

$$\mathcal{L} [\mathcal{L}^\dagger [\phi]](x+iy) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} dy' \exp(-it(y'-y)) \phi(x+iy') \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy' \int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-ity') \phi(x+i(y'+y)) \quad (14)$$

<sup>1</sup> 正直に白状すると、ここにギャップがあり、筆者はこのギャップを埋めれていない。この複素積分にジョルダンの補題を適用する場合、無限遠に行くに従って被積分関数の絶対値が 0 に漸近する必要があるが、 $\phi(z)$  の虚軸に近い場所の虚数方向の挙動が 0 収束するのかどうか分かっていない。おそらくハーディ空間の要素であること（ノルム有界性）と、正則性から何かが言えるのではと予想している。

補題を用いて  $dt$  積分の積分範囲を拡大する。つまり、 $t < 0$  について  $\exp(-ity')\phi(x+i(y'+y))$  を加えるが、これの  $y'$  についての積分は先のように全て 0 になることが分かっている。よって

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy' \int_{\mathbb{R}} dt \exp(-ity') \phi(x+i(y'+y)) \quad (15)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy' \delta(y') \phi(x+i(y'+y)) = \phi(x+iy) \quad (16)$$

### 1.3 等長性

$\mathcal{L}, \mathcal{L}^\dagger$  がたちのよい関数にたいしては等長になっていることを示す。

**命題 1.8.** たちのよい  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$  について、 $\|\mathcal{L}[f]\|^2 = \|f\|^2$

*Proof.*

$$\|\mathcal{L}[f]\|^2 \quad (17)$$

$$= \sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}_+} ds \int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-iy(t-s)) \exp(-xt-x's) f^*(s) f(t) \quad (18)$$

$$= \sup_{x>0} \int_{\mathbb{R}_+} ds \int_{\mathbb{R}_+} dt \delta(t-s) \exp(-xt-x's) f^*(s) f(t) \quad (19)$$

$$= \sup_{x>0} \int_{\mathbb{R}_+} dt |\exp(-xt) f(t)|^2 \quad (20)$$

$$= \|f\|^2 \quad (21)$$

**命題 1.9.**  $\|\mathcal{L}^\dagger[\phi]\|^2 = \|\phi\|^2$

*Proof.*  $\mathcal{L}^\dagger[\phi]$  を計算するときの積分軌道の実部を  $x$  とし、 $\mathcal{L}^\dagger[\phi]$  ではなく、 $t \mapsto \exp(-xt) \mathcal{L}^\dagger[\phi](t)$  についてノルムを計算すると、

$$\|t \mapsto \exp(-xt) \mathcal{L}^\dagger[\phi](t)\|^2 \quad (22)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} dy' \int_{\mathbb{R}} dy \exp(-it(y'-y)) \phi(x+iy')^* \phi(x+iy) \quad (23)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} dy' \int_{\mathbb{R}} dy \exp(ity) \phi(x+iy')^* \phi(x+i(y+y')) \quad (24)$$

$$(25)$$

前節と同様に、補題を用いて  $dt$  積分範囲を延長することで、デルタ関数を召喚できる。

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy' \int_{\mathbb{R}} dy \delta(y) \phi(x+iy')^* \phi(x+i(y+y')) \quad (26)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy |\phi(x+iy)| \quad (27)$$

$\sup_{x>0}$  を取れば題意である。

## 2 z 変換

### 2.1 定義

定義 2.1.  $l_+^2$  を、自然数上の 2 乗可積分関数のなすヒルベルト空間とする。

定義 2.2.  $H_d^2$  を、複素平面上、単位円盤を取り除いた領域で定義され<sup>2</sup>、無限遠点を含めて正則な関数に次のノルムを入れて完備化したものとする。

$$\|\phi\|^2 = \sup_{r>1} \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} d\theta |\phi(re^{i\theta})|^2 \quad (28)$$

定義 2.3. 次を  $z$  変換  $\mathcal{Z}$ 、および逆  $z$  変換  $\mathcal{Z}^\dagger$  とする。

$$\mathcal{Z} : l_+^2 \leftrightarrow H_d^2 : \mathcal{Z}^\dagger \quad (29)$$

$$\mathcal{Z}[X](z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} X(n) z^{-n} \quad (30)$$

$$\mathcal{Z}^\dagger[\phi](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} dz z^{n-1} \phi(z) \quad (31)$$

ここで、積分軌道  $C_r$  は、 $re^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) の左回り軌道とする。ただし、ここでもまだ“逆”というのは本当に逆か分かっていない。また、それぞれのノルムについて整合的かも示していない。これを以下で示していく。

### 2.2 ナイーブな同型性

まず、素朴な意味での  $\mathcal{Z}^\dagger \mathcal{Z} = \text{id}$ ,  $\mathcal{Z} \mathcal{Z}^\dagger = \text{id}$  を示す。素朴な意味とは、被積分関数についての滑らかさやノルムの有界性などのたちの良さを仮定した場合に、それぞれの関数空間で、変換逆変換によって各点の値が回復することとする。実際には、変換のドメインもコドメインも完備化した関数空間として定義されているため、このようなたちの良い関数から初めて完備化をする必要があり、これによってノルム同型とするためには、さらにこれらの変換の等長性が必要になる。これは後で示す。

補題 2.4. フーリエ級数の積分核は、 $T^1([0, 2\pi]$  の両端をつなげたものとする) 上たちのよい関数に対してデルタ関数として振る舞う。

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(i\theta n) = \delta(\theta) \quad (32)$$

命題 2.5. 初段の  $z$  変換  $\mathcal{Z}$  が収束している限りにおいて、 $\mathcal{Z}^\dagger \mathcal{Z} = \text{id}$

*Proof.* 留数定理によって即座に従う。

<sup>2</sup>これは通常の円盤ハーディ空間と定義が逆である。大変残念なことに、 $z$  変換の慣習的定義と、ハーディ空間の自然な定義は、 $z$  のべき指数が逆のまま定着している。ここではハーディ空間側の定義をひっくり返すことで、すでに普及している  $z$  変換の慣習に合わせることにする。

**補題 2.6.**  $H_d^2$  の要素のフーリエ変換は負周波数成分をもたない。すなわち、次が成り立つ。 $\phi \in H_d^2, n > 0$  のとき

$$\int_{[0,2\pi]} d\theta \exp(-i\theta n) \phi(re^{i\theta}) = 0 \quad (33)$$

*Proof.* この積分を次の複素積分として再解釈する。

$$\int_{C_r} \frac{dz}{iz} r^n z^{-n} \phi(z) \quad (34)$$

軌道の外側に無限遠円軌道を追加し、それを互いに相殺する同径方向の軌道で行き来することで、正則性から積分をゼロにできる。追加した無限遠円軌道は、 $n > 0$  であることから  $r^{-1}$  以下のオーダーで減衰し、積分に寄与しない。

**命題 2.7.** 初段の逆  $z$  変換  $\mathcal{Z}^\dagger$  が収束している限りにおいて、 $\mathcal{Z}\mathcal{Z}^\dagger = \text{id}$

*Proof.*  $z = re^{i\theta}$  において、この半径  $r$  を  $\mathcal{Z}^\dagger[\phi]$  を計算するときの積分軌道半径と一致される。すると

$$\mathcal{Z}[\mathcal{Z}^\dagger[\phi]](re^{i\theta}) \quad (35)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \in \mathbb{N}} (re)^{-in} \int_{C_r} dz z^{n-1} \phi(re^{i\psi}) \quad (36)$$

$$= \int_{[0,2\pi]} d\psi \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{in(\psi-\theta)} \phi(re^{i\psi}) \quad (37)$$

$$= \int_{[0,2\pi]} d\psi \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{in\psi} \phi(re^{i(\psi+\theta)}) \quad (38)$$

補題を用いて、 $n$  の和の範囲を  $\mathbb{Z}$  へ拡大する。これによってデルタ関数を召喚でき、

$$= \int_{[0,2\pi]} d\psi \delta(\psi) \phi(re^{i(\psi+\theta)}) \quad (39)$$

$$= \phi(re^{i\theta}) \quad (40)$$

となる。

### 2.3 等長性

$\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^\dagger$  がたちのよい関数にたいしては等長になっていることを示す。

**命題 2.8.**  $\|\mathcal{Z}[X]\|^2 = \|X\|^2$

*Proof.*

$$\|\mathcal{Z}[X]\|^2 \quad (41)$$

$$= \sup_{r>1} \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} d\theta \sum_{n,m \in \mathbb{N}} r^{-(n+m)} e^{-i(n-m)\theta} X(n)^* X(m) \quad (42)$$

$$= \sup_{r>1} \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \delta_{n,m} r^{-(n+m)} X(n)^* X(m) \quad (43)$$

$$= \sup_{r>1} \sum_{n \in \mathbb{N}} r^{-2n} X(n)^* X(n) \quad (44)$$

$$= \|X\|^2 \quad (45)$$

**命題 2.9.**  $\|\mathcal{Z}^\dagger[\phi]\|^2 = \|\phi\|^2$

*Proof.*  $\mathcal{Z}^\dagger[\phi]$  を計算するときの積分軌道半径を  $r$  とし、 $\mathcal{Z}^\dagger[\phi]$  ではなく、 $n \mapsto r^{-n} \mathcal{Z}^\dagger[\phi](n)$  についてノルムを計算すると

$$\|n \mapsto r^{-n} \mathcal{Z}^\dagger[\phi](n)\|^2 \quad (46)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} r^{-2n} \int_{C_r} dz'^* \int_{C_r} dz z'^{(n-1)} z^{(n-1)} \phi(z')^* \phi(z) \quad (47)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{[0,2\pi]} d\psi \int_{[0,2\pi]} d\theta e^{in(\theta-\psi)} \phi(re^{i\psi})^* \phi(re^{i\theta}) \quad (48)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{[0,2\pi]} d\psi \int_{[0,2\pi]} d\theta e^{in\theta} \phi(re^{i\psi})^* \phi(re^{i(\theta+\psi)}) \quad (49)$$

ここで、補題を用いて  $n$  の和の範囲を  $\mathbb{N}$  へ拡張する。 $n$  が負の時は追加した項の  $\theta$  の積分はゼロになるのでこれは結果に寄与しない。これによってデルタ関数を召喚できるので、

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} d\psi \int_{[0,2\pi]} \delta(\theta) \phi(re^{i\psi})^* \phi(re^{i(\theta+\psi)}) \quad (50)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} d\psi |\phi(re^{i\psi})|^2 \quad (51)$$

$r \rightarrow 1$  とすれば題意である。

### 3 フィルターと $\infty$ ノルム

ラプラス変換と  $z$  変換のインデックス構造  $\mathbb{R}_+, \mathbb{N}$  は、ともに時間を表しており、 $L^2(\mathbb{R}_+), l^2_+$  はどちらもパワーが有界な信号を表している。これらの上の線形写像であって、並進不変：時間に対する並進変換について包絡作用素あるようなもの<sup>3</sup>を、フィルターと呼ぶ。とくに有界なフィルターを安定なフィルターという。このフィルターは通常、 $\infty$  ノルムによるハーディ空間の掛け算作用素として表現される。このことを動機づける。

<sup>3</sup>すなわち、時間経過にたいして特性が変化しない写像のこと

**定義 3.1.**  $f \in L^1(\mathbb{R}_+), h \in L^2(\mathbb{R}_+)$  についての畳み込み  $f \star h$  を

$$(f \star h)(t) = \int_{s \leq t} ds f(t-s)g(s) \quad (52)$$

で定義する。結果は再び  $L^2(\mathbb{R}_+)$  になる。

遅延作用素  $D_s : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$  を

$$D_s[f](t) = f(t-s) \quad (53)$$

で定義する。

線形作用素  $F : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$  が  $D_s$  と可換なとき、これをフィルターと呼ぶ。

**補題 3.2.**  $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+), h \in L^2(\mathbb{R}_+)$  のとき、

$$\mathcal{L}[f \star h](z) = \mathcal{L}[f](z)\mathcal{L}[h](z) \quad (54)$$

**定義 3.3.**  $X \in l_+^1, Y \in l_+^2$  についての畳み込み  $X \star Y$  を

$$(X \star Y)(n) = \sum_{m \leq n} X(n-m)Y(m) \quad (55)$$

で定義する。結果は再び  $l_+^2$  になる。

遅延作用素  $d_m : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$  を

$$d_m[X](n) = X(n-m) \quad (56)$$

で定義する。

線形作用素  $F : l_+^2 \rightarrow l_+^2$  が  $d_m$  と可換なとき、これをフィルターと呼ぶ。

**補題 3.4.**  $X \in l_+^1 \cap l_+^2, Y \in l_+^2$  のとき、

$$\mathcal{Z}[X \star Y](z) = \mathcal{Z}[X](z)\mathcal{Z}[Y](z) \quad (57)$$

molifier、すなわちデルタ関数に漸近するような  $L^2$  関数列  $g_e \in L^2(\mathbb{R}_+), \lim_{e \rightarrow 0} g_e = \delta$  をとる。より具体的には次が成り立つようにする。 $g_e$  自体が連続、可微分、コンパクトサポートなどのよい性質を備え（このため、 $g_e$  自体が様々な  $L^p(\mathbb{R}_+)$  に属し、特に畳み込みが定義できる）、 $f$  がたちのよい関数<sup>4</sup>であれば、

$$\lim_{e \rightarrow 0} (g_e \star f)(t) = f(t) \quad (58)$$

となるようにする。

---

<sup>4</sup>例えば、“各点の値” が曖昧さなく定義できる：連続代表が一意的。といった性質をもつ。

フィルター  $F$ 、 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$  に対して、畳込みの積分の収束性が十分良好であれば、線形性を用いてフィルターの作用とこれを交換することで、

$$F(g_e \star f) \quad (59)$$

$$= F\left(t \mapsto \int_{s < t} ds g_e(t-s)f(s)\right) \quad (60)$$

$$= F\left(t \mapsto \int_{s < t} ds (D_s g_e)(t)f(s)\right) \quad (61)$$

$$= \int_{s < t} ds F(D_s g_e)(t)f(s) \quad (62)$$

$$= \int_{s < t} ds D_s(F(g_e))(t)f(s) \quad (63)$$

$$= \int_{s < t} ds F(g_e)(t-s)f(s) \quad (64)$$

$$= F(g_e) \star f \quad (65)$$

となる。これをラプラス変換すると、

$$\mathcal{L}[F(g_e \star f)](z) \quad (66)$$

$$= \mathcal{L}[F(g_e) \star f](z) \quad (67)$$

$$= \mathcal{L}[F(g_e)](z)\mathcal{L}[f](z) \quad (68)$$

となる<sup>5</sup>。そこで、

$$\mathcal{L}[F](z) = \lim_{e \rightarrow 0} \mathcal{L}[F(g_e)](z) \quad (69)$$

が、複素右半平面で a.e 有界に定義されるなら、

$$\mathcal{L}[F(f)](z) \quad (70)$$

$$= \lim_{e \rightarrow 0} F(g_e \star f) \quad (71)$$

$$= \lim_{e \rightarrow 0} \mathcal{L}[F(g_e)](z)\mathcal{L}[f](z) \quad (72)$$

$$= \mathcal{L}[F](z)\mathcal{L}[f](z) \quad (73)$$

となり、フィルターの作用は  $\mathcal{L}[F(f)](z)$  による掛け算作用素として表現される。この作用素ノルムは当然

$$\sup_{\operatorname{Re} z > 0} |\mathcal{L}[F(f)](z)| \quad (74)$$

だが、これは  $H_h^2$  のノルムの  $\infty$  アナロジーである  $H_h^\infty$  ノルムに一致する。したがって (有界な：安定な) フィルターは  $H_h^\infty$  の元として表現される。 $H_h^\infty$  は、複

---

<sup>5</sup>( $F(g_e)$  が畳込みとラプラス変換を貫通するための適当な性質をもつ必要があるが、今は  $H_h^\infty$  を動機づけるのが目的なので仮定するものとする。



素右半平面で定義される正則関数について、 $\sup_{\text{Re } z > 0} |-(z)|$  によるノルムを入れたものである。

これは通常インパルス応答のラプラス変換として与えられるものだが、インパルス直接扱うには超関数を使う必要があるため、molifier で代用すると以上になる。実のところ、 $H_h^\infty$  に対応する実時間のフィルターは、一般に distribution になる。実時間の distribution と  $H_h^\infty$  の間をざっくりと行き来するなら、単にノルムを気にせずに  $\mathcal{L}, \mathcal{L}^\dagger$  の計算式を適用すればよい。

$z$  変換の場合は超関数や molifier を気にする必要はない。 $\delta_n \in l_+^1 \cap l_+^2$  を

$$\delta_n(m) = \delta_{n,m} \quad (75)$$

で定義すれば、フィルター  $F$ 、 $X \in l_+^2$  に対して、線型性と有界性によって

$$F(X) \quad (76)$$

$$= F\left(\sum_n X(n)\delta_n\right) \quad (77)$$

$$= \sum_n X(n)F(\delta_n) \quad (78)$$

$$= \sum_n X(n)F(d_n\delta_0) \quad (79)$$

$$= \sum_n X(n)d_nF(\delta_0) \quad (80)$$

$$= F(\delta_0) \star X \quad (81)$$

となる。これを  $z$  変換すれば

$$\mathcal{Z}[F(X)](z) \quad (82)$$

$$= \mathcal{Z}[F(\delta_0) \star X](z) \quad (83)$$

$$= \mathcal{Z}[F(\delta_0)](z)\mathcal{Z}[X](z) \quad (84)$$

となり<sup>6</sup>、フィルターはの作用は  $\mathcal{Z}[F(\delta_0)](z)$  となり、その作用素ノルムは

$$\sup_{|z|>1} |\mathcal{Z}[F(\delta_0)](z)| \quad (85)$$

である。やはり  $H_d^2$  の  $\infty$  アナロジーである  $H_d^\infty$  を定義することができて、これはそこでのノルムに一致する。したがって、有界な (安定な) フィルターは  $H_d^\infty$  の元として表現される。 $H_d^\infty$  は、単位円盤を取り除いた複素平面と無限遠で正則に定義される複素関数に  $\sup_{|z|>1} |-(z)|$  によるノルムを入れた空間である。

## 4 非有界性の覚書

信号やフィルターがそもそも  $L^2(\mathbb{R}_+), l_+^2, H_*^\infty$  に収まらないということは応用上当然のようにありえる<sup>7</sup>。もともとラプラス変換や  $z$  変換は、その積分核の定義域

<sup>6</sup>ここでも  $F(\delta_0)$  が畳み込みと  $z$  変換を貫通するために適当な性質を保つ必要があるが、今は  $H_d^\infty$  を動機づけるのが目的なので適当に仮定するものとする。

<sup>7</sup>例えば、信号の微分や積分は当然非有界になる。

を複素数に拡張することで、信号に対する指数的な減衰と、収束性の向上による正則性を得たものと見ることができる。信号やフィルターの性質によっては、必要な減衰の程度は当然違ってくるので、ここまでで議論した信号やフィルターの空間とハーディ空間の同型はあくまで1つの目安ないし基準として考え、実際の解析においては柔軟に対応するべきと思われる。

## 5 周波数特性

フィルターの周波数特性は、しばしそのラプラス/ $z$ 変換において  $z = i\omega, e^{i\omega}$  とすることで得られる。このことを動機づける。

定常波  $f(t) = \exp(i\omega t)$  を考える。これはもちろん  $L^2(\mathbb{R}_+)$  には入らないが、減衰因子  $\exp(-rt)$  を乗じて  $L^2(\mathbb{R}_+)$  の元とし、 $r \rightarrow 0$  とすれば擬似的にラプラス変換の対象として扱うことができる。このラプラス変換は

$$\frac{1}{z - (i\omega - 0)} \quad (86)$$

となる。したがって、フィルター関数  $F(z)$  の結果出力は

$$\frac{1}{z - (i\omega - 0)} F(z) \quad (87)$$

となる。ここで、この出力の中に、周波数  $\omega$  の定常波がどのくらい含まれているかを調べたい。次のような問題設定をする。

$$\operatorname{argmin}_{c \in \mathbb{C}} \left\| \frac{1}{z - (i\omega - 0)} F(z) - \frac{c}{z - (i\omega - 0)} \right\|^2 \quad (88)$$

つまり、出力信号から、その周波数の定常波を取り除くにあたって、ノルム、すなわち出力信号の強度を最小化する。実のところ、定常波のラプラス変換が  $z = i\omega(-0)$  に極を持っているため、有界なフィルターについては、ノルムを最小化するために  $c = F(i\omega(+0))$ <sup>8</sup>が唯一の選択肢となる。これ以外の値を設定した場合、このノルムはいくらでも大きくなる。したがって、フィルターの周波数特性は  $F(i\omega(+0))$  で計算できる<sup>9</sup>。

$z$ 変換でも事情はまったく同じである。1ステップの位相差が  $e^{i\theta}$  である定常波  $X(n) = e^{in\theta}$  は  $l^2_+$  には属さないが、同様に減衰因子  $r^{-n}, (r > 1)$  を乗じて  $r \rightarrow 1$  とすることで擬似的に取り扱える。

<sup>8</sup>接近の向きが  $+$  に切り替わっているのは、そもそも定義域に含まれていないからである。

<sup>9</sup>実を言うと本稿を書いた理由は、この周波数特性 (未定義語) の意味を抽象度を落とさずに説明することだった。つまり、周波数特性は何で定義され、それはなぜそうあるのかということである。抽象度を落とさず、というのは、その特徴づけを、具体的な系の例証に堕することなく、あくまで関数空間の語法で述べるということである。ここでの論法は筆者が勝手に考えたものだが、それによれば、“周波数特性 (定義)” とは、入力定常波と同じ周波数の定常波が、出力に “どれくらい含まれているか (未定義語)” であり、信号に定常波が “どれくらい含まれている (定義)” とは、信号から定常波を “最も差し引いた (未定義語)” ときの係数のことであり、“もっとも差し引いた (定義)” とは、差し引いたあとの信号のノルムがそのようなもののうちで最小であることである。この説明には未定義や循環はなく、語法は関数空間のそれで完結しており、その意味するところにも一定の妥当性があり、かつ従来の語法と結果的に一致する。

この  $z$  変換は

$$\frac{1}{1 - z^{-1}e^{i\theta}(1 - 0)} \quad (89)$$

フィルター関数  $F(z)$  を通した出力は

$$\frac{1}{1 - z^{-1}e^{i\theta}(1 - 0)} F(z) \quad (90)$$

であり、これに対して次の問題設定を行う。

$$\operatorname{argmin}_{c \in \mathbb{C}} \left\| \frac{1}{1 - z^{-1}e^{i\theta}(1 - 0)} F(z) - \frac{c}{1 - z^{-1}e^{i\theta}(1 - 0)} \right\|^2 \quad (91)$$

やはりここでも同様に、 $e^{i\theta}(1 - 0)$  の極を相殺するために、 $c = e^{i\theta}(1 + 0)$  のみがこのノルムを最小化する。したがって、フィルターの周波数特性は  $F(e^{i\omega(1+0)})$  で計算できる。