幾何的ラグランジュ形式

@phykm

2017 年 3 月 30 日

概要

微分形式によるハミルトン形式はシンプレクティック幾何学として十分メジャーな地位を築いているように思われる一方で、ラグランジュ形式の幾何学的な形式論の言及に乏しい。山本義隆氏の著作 [1] は十分な質量の一方、数学と物理の折衷的なスタイルで肝心のところが非常に難解であったが、ようやく幾何的ラグランジュ形式が何であるかを了解したので、これをまとめておく。

1　幾何的ラグランジュ形式

力学の主たる関心は、有限個のパラメータでその「位置」が指定できるようなもの、そしてその振る舞いである。この「位置」のあり得べき集合として配位空間を考える。

Definition 1.1. 力学系の配位空間とは、有限次元可微分多様体のこととする。以下では N で書く。

従って、運動とは、N 上の曲線 $c : \mathbb{R} \to N$ のことである。それは（少なくとも区分的には）可微分だとする。ところで「この運動がなにによって決まるのか」という関心がある。一般には、配位空間の点を指定するだけでは運動は決定されない。「微小な時間経過の後に凡そどのような変位をするかが、その時点の「状態」で決まる」ような「状態」としては、配位は不足である。そこで、この運動を微分する。それは接バンドル TN 上の曲線 $\dot{c} : \mathbb{R} \to TN$ となるが、ただの TN 曲線ではなく、それが N からの微分で得られたことを意味する次の条件をもつ。$\pi : TN \to N$ を射影とする。

$$\frac{d}{dt}\pi \circ \dot{c} = \dot{c} \tag{1}$$

ただし、この $\frac{d}{dt}$ は、N 上の曲線 d と、適当な N のチャート $\phi = \{x^i\}_i$ について、

$$\frac{d}{dt}d = \sum_i \frac{d}{dt}(x^i \circ d)\partial_{x^i} \tag{2}$$

で定義される。そこで運動の定義をこのような条件を満たす TN 上曲線へと更新しよう。このとき状態とは N の点ではなく、TN の点である。このようにしても、まだ「微小な時間経過の後に凡そどのような変位をするかが、その時点の「状態」で決まる」保証はないが、観察によって、例えばニュートン力学およびそれとつながる種々の物理学は、TN の点だけで次の瞬間の挙動が決定されることがわかっている。すなわち、それらの運動方程式は高々二階である。力学のもっとも汎用な主張とは、「物体の挙動は、少なくとも配位変数の一階微分までの情報で決定される」ということである。力学において時間は先験的に与えられるパラメータであり、また TN の点だけで運動が決定されるのだから、TN 上には時間発展に相当する 1 パラメータ変換群があることになる。

Definition 1.2. 力学系の時間発展とは接バンドル TN 上可微分な *1* パラメータ変換群 $p : \mathbb{R} \times TN \to TN$ で、次の条件を満たすものとする。$v \in TN$ とし、

$$\frac{d}{dt}\pi \circ p(t,v) = p(t,v) \tag{3}$$

この時間発展の軌道のことを *(*改めて*)* 運動とよぶ。

以下 N, TN を行き来するので語法を用意しておく。N のチャート (局所座標) を $\phi = \{x^i\}_i$ などと書く。これは座標関数それ自体を記号 ϕ で指定し、その成分が x^i ということを意味する。この成分に沿った、接バンドルのフレーム (局所基底) を ∂_{x^i} と書き、余接バンドルのフレームを dx^i と書く。N のチャートに対して、その定義域上のファイバーを定義域に持つ TN のチャートを次のように考えることができる。すなわち、$v = \sum_i v^i \partial_{x^i} \in T_qN$ であるとき、この座標値を $\{x^i(q), v^i\}_i$ とする。この TN のチャートを ϕ の共役チャートと呼び、$\overline{\phi}$ で書くことにする。すなわち、$\overline{\phi} = \{x^i, v^i\}_i$ と書いたならば、この成分について x^i は ϕ のそれに一致し、v^i は ϕ のフレームによる成分展開である。次は基本的事実である。

Proposition 1.3. $\phi = \{x^i\}_i, \psi = \{y^j\}_j$ を、空でない共通定義域をもつ N のチャートとする。この共通定義域のファイバー上、これらの共役チャート $\overline{\phi} = \{x^i, v^i\}_i, \overline{\psi} = \{y^j, w^j\}_j$ について、接バンドル成分に関するヤコビ行列は $v \in T_qN$ ごとに

$$\frac{\partial v^i}{\partial w^j}(v) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(\pi(v)) \tag{4}$$

である。なぜならば、N のチャート切り替えは、TN のフレームの変換にほかならないため。

さて、ラグランジュ形式とは、以上の時間発展が、ある特殊な形で書かれるときを言う。

Definition 1.4. 力学系 N の p についての全ての運動が、接バンドル上のある関数 $L : TN \to \mathbb{R}$ についての *(*局所的な：適当な有限の時間区間上での*)* 変分停留問題として書かれる *(p* の軌道からの L の積分の第一変分がゼロであること*)* 時、これをラグランジュ系という。すなわち、任意の $q, v \in T_qN$ について、$p(-, v) : \mathbb{R} \to TN$ は次の *Euler-Lagrange* 方程式を満たす。ただし、ϕ はこの運動を局所的に定義域にもつ N のチャートであり、共役チャートを $\overline{\phi} = \{x^i, v^i\}_i$ とする。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L \circ \overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(p(t,v)) - \frac{\partial L \circ \overline{\phi}^{-1}}{\partial x^i}(p(t,v)) = 0 \tag{5}$$

このとき、L をラグランジアンと呼ぶ。次の積分は作用と呼ばれ、これの変分停留が以上の方程式に同値である。

$$\int_I dtL(p(t,v)) \tag{6}$$

このノートの目的は、このラグランジュ方程式と同値になるような、ベクトル場の方程式である、「幾何学的ラグランジュ方程式」を正確に述べることである。

ラグランジュ方程式は、本質的に運動 1 パラメータ変換群 p なのだから、これを特徴づける微分ベクトル場を同定できればいい。

Definition 1.5. 時間発展 p に対して、これを生成するベクトル場 $X_p \in \Gamma(TTN)$ をラグランジュベクトル場とする。

ただし、$\Gamma(-)$ はバンドルの切断、つまり場のこととする。

p は、N 上の軌道へ射影して微分したときに戻るという性質を持っていた。それを反映する性質が X_p にもある。

Proposition 1.6. ラグランジュベクトル場 X_p について、N のチャート $\phi = \{x^i\}_i$ および、TN 上のこの共役チャート $\overline{\phi} = \{x^i, v^i\}_i$ に対して、これに関するフレームで

$$X_p = \sum_i a^i \partial_{x^i} + b^i \partial_{v^i} \tag{7}$$

と局所的に成分表示した時、$\overline{\phi}$ の定義域にある $v = v^i \partial_{x^i} \in TN$ に対して、

$$a^i(v) = v^i \tag{8}$$

すなわち、X_p がなんであっても、それが時間発展由来である限り、共役チャートによる成分表示の、∂_{x^i} 配位微分成分は、引数 $v \in TN$ それ自体の共役チャート座標成分 $\overline{\phi}(v) = \{x^i(v), v^i(v)\}_i$ の後半に一致する。

Proof. p を成分表示して微分する。$q \in N, v \in T_qN$ で行おう。この点の近傍を含むような定義域をもつチャート ϕ および共役チャート $\overline{\phi}$ をとる。

$$\frac{d}{dt}p(t,v) = \sum_i \frac{d}{dt}x^i(p(t,v))\partial_{x^i} + \frac{d}{dt}v^i(p(t,v))\partial_{v^i} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

$\frac{d}{dt}x^i(p(t,v))$ は TTN の成分の一部だが、これは明らかに TN の成分 $\frac{d}{dt}x^i(\pi(p(t,v)))$ と一致する。それは p 自体の性質 (3) によって、$p(0,v)$ の成分に等しく、それは v^i である。

このことは、「配位 x」の微小時間における変位が「速度 v」であることにほかならないので、直観的には当然だろう。

Definition 1.7. ラグランジュ系において、次の $\theta \in \Gamma(T^*TN)$ ラグランジュ基本 1 形式と呼ぶ。この定義は N のチャート ϕ に基づく共役チャート $\overline{\phi} = \{x^i, v^i\}_i$ を利用しているが、*(4)* によって N のチャート選択によらないため *well-defined* である。

$$\theta = \sum_i \frac{\partial L \circ \overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i} dx^i \tag{11}$$

この外微分 $d\theta \in \Gamma(\wedge^2 T^*TN)$ をラグランジュ基本 2 形式と呼ぶ。

$$d\theta = \sum_i d\frac{\partial L \circ \overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i} \wedge dx^i \tag{12}$$

この微分形式はやや天下りだが、ここでの目的は、作用の変分それ自体を微分形式の双対内積と積分に帰着させることにある。N 上の軌道が与えられた時、それを TN の軌道に持ち上げることができる。それから、その軌道からの変分を考えると、変分それ自体は微小だから、軌道上定義された TN の要素と思うことができる。したがって、「作用の第一変分」を表現する微分形式は、もしあるならば 2 形式だと期待でき、軌道上定義された二つの TN の要素との双対内積がゼロになることが、停留条件になると予想できる。では具体的

に θ, X_p に関するどのような条件が、どのようにしてラグランジュ方程式に等価になるか見よう。まず $d\theta$ に X_p を代入する。

$$\langle d\theta|X_p,-\rangle(v)=\sum_i\langle d\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}|X_p\rangle(v)dx^i-\langle dx^i|X_p\rangle(v)d\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(v) \tag{13}$$

$$=\sum_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(p(t,v))dx^i-v^i(v)d\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(v) \tag{14}$$

右辺第一項は、双対内積が線微分とみなせることから。第二項は (8) による。

$$=\sum_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(p(t,v))dx^i-\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial x^i}(v)dx^i+\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial x^i}(v)dx^i-v^i(v)d\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(v) \tag{15}$$

$$=\mathbb{EL}(L)-\sum_i\left(v^i(v)d\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(v)\right)+dL-\sum_i\left(\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(v)dv^i\right) \tag{16}$$

$$=\mathbb{EL}(L)-d\sum_i\left(v_i(v)\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(v)\right)+\sum_i\left(\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(v)dv^i\right)+dL-\sum_i\left(\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(v)dv^i\right) \tag{17}$$

$$=\mathbb{EL}(L)-dH(L) \tag{18}$$

ただしここで、

$$\mathbb{EL}(L)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}(p(t,v))dx^i-\frac{\partial L}{\partial x^i}dx^i\in\Gamma(T^*TN) \tag{19}$$

$$H(L)=\sum_i v^i\frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}-L:TN\to\mathbb{R} \tag{20}$$

とする。従って、次が言える。

Proposition 1.8. X_p を任意の時間発展とする。TN 上の関数 L と、L に関するラグランジュ 2 形式について次が成り立つ。ただし、$\mathbb{EL}(L), H(L)$ は以上の定義に基づく。関数 $H(L)$ をラグランジアン L についてのハミルトニアンとよぶ。

$$\langle d\theta|X_p,-\rangle=\mathbb{EL}(L)-dH(L) \tag{21}$$

Theorem 1.9. 時間発展 p が *Euler-Lagrange* 方程式を満たしてラグランジュ系であることと、そのラグランジュベクトル場 X_p が次の TN 上の 1 形式方程式を満たすことは同値。

$$\langle d\theta|X_p,-\rangle=-dH(L) \tag{22}$$

ついでにネーター定理を示しておく。1 パラメータ変換群 T が N に作用している時、これから TN 上の 1 パラメータ変換群を誘導できる。

Proposition 1.10. $T:\mathbb{R}\times N\to N$ を N 上の 1 パラメータ変換群とする。このとき、微分写像で定義される TN 上の 1 パラメータ変換群 $DT:\mathbb{R}\times TN\to TN$ があって、次の自然さを満たす。

$$\begin{tikzcd} TN \arrow[r, "DT(t,-)"] \arrow[d, "\pi"'] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "T(t,-)"'] & N \end{tikzcd} \tag{23}$$

Proof. 微分写像によって構成する。

この微分ベクトル場を得ることができる。T に対して、$Y_T \in \Gamma(TTN)$ と書こう。

Definition 1.11. 1 パラメータ変換群 T に対する、$\langle\theta|Y_T\rangle : TN \to \mathbb{R}$ をネーターモーメント、または T 共役運動量と呼ぶ。

ネーターの定理とは次のことである。

Theorem 1.12. ラグランジュ系において、ラグランジアンが 1 パラメータ変換群 T 作用について不変、すなわち、ラグランジアンの Y_T*(Lie)* 微分がゼロ

$$L_{Y_T}L = \langle dL|Y\rangle = 0 \tag{24}$$

であれば、$\langle\theta|Y_T\rangle$ は運動の保存量、すなわち p の軌道上一定である。

Proof. 次の計算をする。(21) が本質的である。

$$\begin{aligned}
L_{Y_T}L &= \langle dL|Y\rangle & (25)\\
&= \langle d\left(\sum_i \frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}v^i - H\right)|Y\rangle & (26)\\
&= \langle d\sum_i \frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}v^i|Y\rangle + \langle d\theta|X_p, Y_T\rangle - \mathbb{EL}(L)(Y) & (27)\\
&= \langle d\sum_i \frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}v^i|Y_T\rangle + X_p\langle\theta|Y\rangle - Y_T\langle\theta|X_p\rangle - \mathbb{EL}(L)(Y_T) & (28)\\
&= X_p\langle\theta|Y_T\rangle - \langle\theta|[X_p, Y_T]\rangle - \mathbb{EL}(L)(Y_T) & (29)
\end{aligned}$$

ただし、途中、

$$Y_T\langle\theta|X_p\rangle = Y_T\sum_i \frac{\partial L\circ\overline{\phi}^{-1}}{\partial v^i}v^i \tag{30}$$

および、微分形式に関する公式

$$\langle d\omega|X, Y\rangle = X\langle\omega|Y\rangle - Y\langle\theta|X\rangle - \langle\theta|[X, Y]\rangle \tag{31}$$

を用いた。もし $L_{Y_T}L = 0$ であれば、

$$X_p\langle\theta|Y_T\rangle = \langle\theta|[X_p, Y_T]\rangle + \mathbb{EL}(L)(Y_T) \tag{32}$$

ラグランジュ系であれば $\mathbb{EL}(L) = 0$ なので

$$X_p\langle\theta|Y_T\rangle = \langle\theta|[X_p, Y_T]\rangle \tag{33}$$

この右辺がゼロであることを示せば、題意である。しかしこのためには、若干の計算がいる。それは $X_p, Y_T \in \Gamma(TTN)$ の具体型に関するものである。まず、X_p について、(8) から共役なチャート $\phi, \overline{\phi} = \{x^i, v^i\}_i$ のもとで、

$$(X_p\circ\overline{\phi})(x, v) = \sum_i v^i\partial_{x^i} + a^i(x, v)\partial_{v^i} \tag{34}$$

となるのであった。ただし (x,v) は $\overline{\phi}$ による座標値とする。すなわち、X_p の、∂_{x^i} 成分は、チャート $\overline{\phi}$ のもとで、座標後半の $v=\{v^i\}_i$ そのものである。一方、Y_T は、それが微分写像によって誘導されたものであるという事実から、その成分表示と座標依存性は次のようになる。

$$(Y_T \circ \overline{\phi})(x,v) = \sum_i y^i(x)\partial_{x^i} + \sum_j v^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x)\partial_{v^j} \tag{35}$$

すなわち、∂_{x^i} 成分は、$x=\{x^i\}_i$ にしかよらず、また ∂_{v^i} 成分は、∂_{x^i} 成分の微分行列と、$v=\{v^i\}_i$ の積である。この明示的な座標依存性のために、Lie 括弧積 $[X_p, Y_T]$ は ∂_{x^i} 成分が相殺されてゼロになることが簡単な計算で確かめられる。一方でラグランジュ基本 1 形式 θ は dx^i 成分しか持たないため、これとの内部積は $\langle\theta|[X_p,Y_T]\rangle = 0$ である。よって題意が成り立つ。

2　雑感

普通の力学に比べたラグランジュ形式、およびハミルトン形式のメリットが何であるかというのを具体的に主張しようとすると途端に曖昧になってしまう。しばし「幾何学的」であることがそれ自体一種の善性とみなされる為に、そのような定式化を得ることもまた良いとされ、筆者もそれに同意するが、何かもっと決定的な違いがあって欲しいところである。強いて言えば、発見法的議論を制限するという効果はありそうである。究極ラグランジアンの形はカンによって見つけなくてはならない[*1]が、それ以降の処理は一般論としてある。

ところで、ハミルトン形式では、（非退化な）シンプレクティック形式があるために、可微分関数としての物理量と、1 パラメータ変換群がうまく対応し、さらに物理量同士の変換がポアソン括弧で表現できる。一方でラグランジュ形式にはそのような構造はない。ネーターモーメントは確かに変換群と物理量を連絡するが、N を媒介する為にその形は制限される。そしてそのことがネーター定理において本質的だったが、ハミルトン形式ではネーター定理に相当するものはたんにポアソン環の可換性で、より取扱いは単純である。有意な物理量は何らかの変換群のモーメントとして手に入ることが多いが、そのような装置の有無であればどちらも優劣はない。

ラグランジュ形式の方が得意な処理というのはある。それは運動が最適化問題で書かれているため、アドホックなホロノーム拘束に強いという点である。それは単に拘束条件のペナルティ項を追加するだけでいい。またハミルトン形式とは違って、配位空間という直観的に素直な空間からスタートでき、ラグランジアンが非退化かどうか気にする必要がないという点もある。一般にはラグランジュ形式からハミルトン形式で移行できる保証はないので、配位空間を想定できるような状況では、ラグランジュ形式の方が射程が広いことになる。

参考文献

[1] 山本義隆:解析力学 1 , 朝倉書店,(1998)

[2] 松島与三:多様体入門, 裳華房,(1965)

[*1] 対称性などの「自然な」性質を要求して制限していくとか、運動方程式がもうわかっているならラグランジュ方程式がそれを再生するようにするとか、ポテンシャル中の運動体ならすでにわかっているとか、そういったものである。