

ブラウワー不動点定理

@phykm

2018 年 6 月 14 日

概要

<https://togetter.com/li/1236640> をみてウツウツウツウツウツウツウツウツウツウツウツウツウツとなったので僕も書いてみた。(数学者を悲しませたくは) ないです。

1 普遍被覆へのリフトと円周の基本群

Definition 1.1. 位相空間上のパスとは、 $[0, 1]$ からの連続写像のこととする。

Definition 1.2. 位相空間 X にたいして位相空間 Y からの全射連続写像 $p: Y \rightarrow X$ が被覆であるとは、次のような性質をもつ開被覆 $\{U_a\}_{a \in A}$ があることとする。この開集合 U_a の逆像 $p^{-1}(U_a)$ は、 p のそこへの制限が U_a との同相写像になるような非交差開集合族 $\{V_{a,\lambda}\}$ たちの合併 $\sum_{\lambda} V_{a,\lambda}$ である。

Lemma 1.3. 実数上閉区間 $[0, 1]$ の開集合は、非交差開区間たちの和で書ける。ただしここで開区間とは $[0, a), (b, 1]$ のようなものを含む。

Proof. 補集合をとって、閉集合 X が、非交差閉区間たちの和で書けることを示す。この閉集合の弧状連結成分をとって X_i とする。中間値の定理から、この弧状連結成分は、凸空間である。つまり、任意の二点の中間値はここに含まれる。また、 X_i の閉包 $\overline{X_i}$ は X_i に一致して X_i は再び閉集合である。なぜなら、そうでないとき、 $x \in \overline{X_i} - X_i$ が取れて、 $x \in X$ かつ $x \notin X_i$ である。 $|x - x_n| \leq 1/2^n$ となるような $x_n \in X_i$ をとって、連続な $c: [0, 1] \rightarrow X_1$ を次を満たすように構成する。

$$c(1 - 1/2^n) = x_n \tag{1}$$

$c(1 - 1/2^n), c(1 - 1/2^m)$ の間は X_1 の凸を用いて、加重平均でつなぐ。これは連続な道であり、また明らかに有界である。さらに構成から、 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 1 - \delta < t < 1, |c(t) - x| > \epsilon$ であるので、 $c(1) = x$ として連続に延長できる。このとき、 $x \notin X_1$ かつ X_1 が弧状連結成分であることに矛盾する。したがって、 X_i は閉集合でなければならない。閉集合であるから $\sup X_i, \inf X_i \in X_i$ であり、凸であるから $X_i = [\inf X_i, \sup X_i]$ である。閉区間同士が交差するとき、それはあきらかに弧状連結になってしまうので、各弧状連結成分は交差しない。よって、題意である。

Definition 1.4. X 上のパス c に対して、被覆 Y 上のパス $\hat{c}$ がリフトであるとは、被覆の射影 $p: Y \rightarrow X$ に対して $p \circ \hat{c} = c$ を満たすこととする。

Theorem 1.5. X の被覆を Y とし、 c を X 上のパスとする。 $p^{-1}(c(0))$ から一点 $y \in Y$ を選択したとき、 $\hat{c}(0) = y$ であるようなリフト $\hat{c}$ が一意的に存在する。

Proof. 被覆空間のもつ開被覆をもちいて、パス c を Y に連続になるように延長する。 $\{U_a\}_{a \in A}$ を、 $p^{-1}(U_a) = \sum_{\lambda} \lambda V_{a,\lambda}, p|_{V_{a,\lambda}} : V_{a,\lambda} \sim U_a$ となるような開被覆とする。 $\{c^{-1}(U_a)\}_{a \in A}$ は $[0, 1]$ の開被覆となる。補題より、 $p^{-1}(U_a)$ は开区間の非交差和とみなせるので $p^{-1}(U_a) = \sum_{b \in B_a} I_{a,b}$ とする。

したがって、 $\{I_{a,b}\}_{a \in A, b \in B_a}$ を $[0, 1]$ の開被覆として取れる。 $[0, 1]$ はコンパクトであるから、このうち有限個によって被覆できるので、そのような部分をとって、 $\{I_s\}_{s \in C}, \#C < \infty$ とする。さらに、これらを次のように並べてナンバリングする。

0 を含むような I_s のうち、 $\sup I_s$ が最大であるようなものを I_1 とする。 I_1 と交差するような I_s が他に存在しないとき、ナンバリングを終了する。このとき、 $[0, 1] \subset I_1$ である。 I_1 と交差するものが存在するとき、ふたたびそれらのうち $\sup I_s$ が最大であるようなものを I_2 とする。 I_1, I_2 と交差するような I_s が他に存在しないとき、やはりナンバリングを終了する。このとき $[0, 1] \subset I_1 \cup I_2$ である。 I_1, I_2 と交差するようなものが存在するとき、再びそれらのうち $\sup I_s$ が最大であるようなものを I_3 とする。以下同様である。

このナンバリングは有限ステップで終了する。新たに選ばれた $\{I_i\}_{i:1 \dots n}$ について、 $m : \{1 \dots n\} \rightarrow A$ があって、 $c(I_i) \in U_a$ であるような $a = m(i) \in A$ を与える。

これら开区間は、隣接するもの同士は必ず交差している。そこで $t_0 = 0, t_n \in I_n \cap I_{n+1}, t_n = 1$ として、 $J_i = [t_{i-1}, t_i], i : 1 \dots n$ と定義する。 J_i は隣接するもの同士一点を共有していて、 $[0, 1]$ を被覆し、かつ $J_i \subset I_i$ である。この J_i に対して、次のようにリフトパス $\hat{c}$ を決めていく。

$$\hat{c}|_{J_1} = p|_{V_{m(1),\lambda}}^{-1} \circ c, s.t. y \in V_{m(1),\lambda} \quad (2)$$

$$\hat{c}|_{J_i} = p|_{V_{m(i),\lambda}}^{-1} \circ c, s.t. \hat{c}(t_{i-1}) \in V_{m(i),\lambda} \quad (3)$$

これは p^{-1} を利用しているためにリフト条件を満たし、連続である。また、連続であるための唯一の定義である。あるリフト $\hat{c}$ があれば、以上の J_i ごとに見たとき、 J_i 上では連続性から $V_{m(i),\lambda}$ の λ を変更することはできないため、以上の定義に一致する。したがって、一意的なリフトパスが構成された。

Definition 1.6. 位相空間のパスが閉路であるとは、 $c(0) = c(1)$ の時をさす。

Definition 1.7. 位相空間 X のパス c, d について、これがホモトープであるとは、連続写像 $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ で $f(0, -) = c(-), f(1, -) = d(-)$ であるようなものが存在することをいう。 c, d が閉路であるときには、これに加えて、 $f(s, -)$ が常に閉路であることを課す。

Lemma 1.8. ホモトープ関係は同値関係をなす。

Definition 1.9. 位相空間 X とその点 x をとる。 x を始点終点とする閉路全体を $\Omega(X, x)$ とする。ここに $d * c = (\lambda t. \text{if } t \leq 1/2 \text{ then } c(2t) \text{ else } d(2t - 1)), e = (\lambda t.x), c^{-1} = (\lambda t.c(1 - t))$ で演算を入ると、これはホモトープによる同値関係商のもとで群をなす。これを起点 x の基本群とよび、 $\pi_1(X, x)$ と書く。もし X が弧状連結であれば、 x に依存しない。このときは $\pi_1(X)$ と書く。

Lemma 1.10. 位相空間の連続写像 $f : X \rightarrow Y$ は基本群の準同型 $\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ を誘導し、これは関手的である。とくに位相不変量である。

Proof. 基本群の元とその代表閉路 $[c] \in \pi_1(X, x), c \in \Omega(X, x)$ に対して、 $\pi_1(f)$ を次でさだめ、これが代表の選択によらない準同型であることを示す。

$$\pi_1(f)([c]) = [f \circ c] \quad (4)$$

閉路 c, d が $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ でホモトープであるとする。このとき、 $f \circ c, f \circ d$ は明らかに $f \circ g$ によってホモトープである。したがって、この写像は welldefined. また、 $e_x = (\lambda t. x) \in \Omega(X, x)$ とすると $\pi_1(f)(e_x) = [f \circ e_x] = [e_{f(x)}]$ であり、 $\pi_1(f)([c * d]) = [f \circ (c * d)] = [f \circ c * f \circ d]$ なので群準同型である。関手性は省略する。

Lemma 1.11. $\mathbb{R}$ は S^1 の被覆空間である。

S^1 をユークリッド平面の単位円として実現してあるとする。 $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ を $p(t) = (\cos(t), \sin(t))$ で与える。任意の $(x, y) \in S^2$ に対して、たとえば、 $\{(\cos(t), \sin(t)) | t \in (t_0 - \pi, t_0 + \pi), p(t_0) = (x, y)\}$ などといった近傍を考えることができ、これは $\{(t_0 - \pi + 2n\pi, t_0 + \pi + 2n\pi) | n \in \mathbb{Z}\}$ を逆像にもって、その各々と同相である。

Theorem 1.12. $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$

Proof. 円周の閉路を考える。円周をここではユークリッド平面の単位円とし、起点および終点を $(1, 0)$ であるとする。 S^1 上の閉路 c を、被覆空間である $\mathbb{R}$ へリフトする。閉路であるから、 $p(\hat{c}(1)) = p(\hat{c}(0)) = (1, 0)$ であるため、 $\hat{c}(1) - \hat{c}(0) = 2n\pi$ である。これを用いて上の準同型を

$$f([c]) = n, \text{ s.t. } \hat{c}(1) - \hat{c}(0) = 2n\pi \quad (5)$$

で定義する。リフト時の始点の決め方には $2n\pi$ の不定性があるが、始点だけでリフトが一意的に決まることから、始点の $2n\pi$ 変更はリフトの $\hat{c} \mapsto \hat{c} + 2n\pi$ の変更をもたらす。このため、この定義は始点の $2n\pi$ 移動によらない。

さらに、これは次のように代表の選択によらない。 c, d が $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ によってホモトープであるとする。パス $g(s, 0)$ をリフトしたものを $\hat{g}_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 $g(s, -)$ は常に閉路であるので、 $\hat{g}_0(s)$ を始点として与えることで s ごとにリフトし、 $\hat{g}(-, -) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を得る。これは $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の連続写像になる。なぜなら、今各点で $p \circ \hat{g} = g$ が成り立つが、被覆空間の性質から $g(s, t) \in U \subset S^1$ であるような開集合 U をとって、 $p^{-1}(U) = \sum_n V + 2n\pi$ なる $V + 2n\pi \cap p^{-1}$ の制限が同相になるようにできるが、 $g^{-1}(U)$ においては、 $\hat{g}(s, t) \in V + 2n\pi$ となる n をとれば $\hat{g} = p|_{V+2n\pi}^{-1} \circ g$ と書けるため、連続になるからである。 $g(s, -)$ は常に閉路であるとしたので、 $\hat{g}(s, 1) - \hat{g}(s, 0) = 2n\pi$ であるが $\hat{g}$ の連続性から、この n は一定である。 $g(0, -) = c, g(1, -) = d(-)$ であるから、

$$\hat{c}(1) - \hat{c}(0) = \hat{g}(0, 1) - \hat{g}(0, 0) = \hat{g}(1, 1) - \hat{g}(1, 0) = \hat{d}(1) - \hat{d}(0) \quad (6)$$

となる。

e を $(1, 0)$ から動かない閉路であるとして、 $f([e]) = 0$ であり、また $f([c * d]) = \hat{c}(1) - \hat{c}(0) + \hat{d}(1) - \hat{d}(0)$ であるので、群準同型である。ただしこのとき、 c のリフト始点は d のリフトの終点に一致するように選ぶとする。

さらに、円周を何度も回る閉路を考えれば、この写像は全射である。

最後に単射性を示す。 $f([c]) = 0$ であるときに、 $[c] = [e]$ であることを示す。

$\hat{c}(0) = \hat{c}(1) = 0$ であるとしてよい。ここで、 $\mathbb{R}$ 上で次のホモトピーを考える。

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (7)$$

$$h(s, t) = s(\hat{c}(t)) \quad (8)$$

$p \circ h$ は明らかに、 $c, p \circ h(0, -)$ の間のホモトピーを与えるが、 $p \circ h(0, -) = e$ である。

よって題意となる。

Theorem 1.13. $\pi_1(D^2) \simeq 0$

Proof. 円盤 D^2 上の点に $(1-t)$ を乗算することで、連続に一点に縮めることができる。これは閉路についても同様であり、したがって、任意の閉路は原点の動かない閉路にホモトープとなり、基本群は単位元のみで自明な群となる。

2 ブワウワーの不動点定理

Theorem 2.1. $f : D^2 \rightarrow D^2$ を円盤上の連続写像とする。 f は不動点をもつ。

Proof. 不動点を持たないとして背理する。今 D^2 はユークリッド平面の単位円盤として実現されているとする。仮定から $x, f(x)$ は一致しないので、 $x, f(x)$ をこの順で延長した直線と $S^1 = \partial D^2$ の交点を考えることができる。この交点を与える写像は、二点が一致する点を除いて $(D^2)^2 \rightarrow S^1$ の連続写像として書けるので、これと $\text{id}_{D^2} \times f$ を合成することで、次のような連続写像を構成できる。

$$g : D^2 \rightarrow S^1, \text{ s.t. } g|_{S^1} = \text{id}_{S^1} \quad (9)$$

この g が誘導する基本群の準同型 $\pi_1(g) : \pi_1(D^2) \rightarrow \pi_1(S^1)$ を考える。 $\pi_1(D^2) = 0$ であったから、 $\text{Im} \pi_1(g) = 0$ でなくてはならない。

ところが、 D^2 上、その境界上を一周する閉路 $c : t \in [0, 1] \rightarrow (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ を考えると、 $[g \circ c] = [c] \in \pi_1(S^1)$ は単位元にならず、矛盾である。したがって、 f は不動点をもたなくてはならない。