

モナドと比較定理

@phykm

2017 年 2 月 16 日

概要

随伴の定義おさらい、モナドコモナドの定義およびそのクライスリと代数、およびそれらとの随伴と比較定理について。記法上の注意：以下では $\bullet$ を水平合成、 $\circ$ を水平合成に用いる。この記法は文献によっても、また筆者の中での他のノートでも統一していない。また自然変換と関手が暗黙に並列された場合、これは水平合成と見なす。射の並列は単純な合成と見なす。自然変換のコンポーネントは下添え字でアクセスする。空欄 $-$ はそこを捕獲するラムダ抽象によって写像になっていることを省略している（したがってラムダ記号は書かれない）。上付き線はもとの圏の射をクライスリ圏の射と見なす場合につける。ただし随伴の確認の部分のみ、 $(-)$ と共に、普遍射、余普遍射の一意対応を表す。比較定理を述べるための名称 T, S 圏は一般的ではない。随伴や普遍性の全単射関数の記号は存在しさえすればよいので入れ替わる事がある。

1 モナドとコモナド

Definition 1.1. 圏 $\mathbb{C}$ 上のモナド (*monad*) とは $(T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \eta : \text{id}_{\mathbb{C}} \Rightarrow T, \mu : T^2 \Rightarrow T)$ なる自己関手、自然変換の組で、関手圏において次のダイアグラムを満たすものをいう。

$$\begin{array}{ccccc} T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 & T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 & \xleftarrow{T\eta} & T \\ \mu T \downarrow & & \downarrow \mu & \text{id}_T \swarrow & & \downarrow \mu & \searrow \text{id}_T & \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T & & & T & & \end{array} \quad (1)$$

Definition 1.2. 圏 $\mathbb{C}$ のコモナド (*comonad*) とは $(S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \epsilon : S \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{C}}, \delta : S \Rightarrow S^2)$ なる自己関手、自然変換の組で、関手圏において次のダイアグラムを満たすものをいう。

$$\begin{array}{ccccc} S^3 & \xleftarrow{S\delta} & S^2 & S & \xleftarrow{\epsilon S} & S^2 & \xrightarrow{S\epsilon} & S \\ \delta S \uparrow & & \uparrow \delta & \text{id}_S \swarrow & & \uparrow \delta & \searrow \text{id}_S & \\ S^2 & \xleftarrow{\delta} & S & & & S & & \end{array} \quad (2)$$

ここで $\mu T, T\mu, \eta T, T\eta, \delta S, S\delta, \epsilon S, S\epsilon$ は関手の恒等自然変換と自然変換の水平合成である。一方が恒等自然変換だから、それぞれ $A \in \mathbb{C}$ コンポーネントは $\mu_{T(A)}, T(\mu_A), \eta_{T(A)}, T(\eta_A), \delta_{S(A)}, S(\delta_A), \epsilon_{S(A)}, S(\epsilon_A)$ である。

以下では随伴を使うので、随伴を思い出しておく。

Definition 1.3. 随伴とは、次のどれかである。この状況を $F \dashv G$ と書き、 F を左随伴、 G を右随伴と呼ぶ。

- 関手のペア $F : \mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{D} : G$ と、 Hom 双関手の自然同型 $\theta : \text{Hom}(F(-), -) \Leftrightarrow \text{Hom}(-, G(-)) : \theta^{-1}$

2. 関手 $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ と、全ての $D \in \mathbb{D}$ に対する、 F から D への余普遍射 $\{\epsilon_D : F(D_g) \rightarrow D\}_{D \in \mathbb{D}}$ の存在。
3. 関手 $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ と、全ての $D \in \mathbb{D}$ ごとに $D_g \in \mathbb{C}$ と Hom 関手自然同型 $\phi_D : \text{Hom}(F(-), D) \Leftrightarrow \text{Hom}(-, D_g) : \phi_D^{-1}$ が存在。
4. 関手 $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ と、全ての $C \in \mathbb{C}$ に対する、 C から G への普遍射 $\{\eta_C : C \rightarrow G(C_f)\}_{C \in \mathbb{C}}$ の存在。
5. 関手 $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ と、全ての $C \in \mathbb{C}$ ごとに $C_f \in \mathbb{D}$ と Hom 関手自然同型 $\psi_C^{-1} : \text{Hom}(C_f, -) \Leftrightarrow \text{Hom}(C, G(-)) : \psi_C$
6. 関手のペア $F : \mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{D} : G$ と、そのコンポーネントが全て F から D への余普遍射であるような自然変換 $\epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{D}}$
7. 関手のペア $F : \mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{D} : G$ と、そのコンポーネントが全て C から G への普遍射であるような自然変換 $\eta : \text{id}_{\mathbb{C}} \Rightarrow GF$
8. 関手のペア $F : \mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{D} : G$ と、 $G\epsilon \bullet \eta G = \text{id}_G, \epsilon F \bullet F\eta = \text{id}_F$ を満たす自然変換 $\eta : \text{id}_{\mathbb{C}} \Rightarrow GF, \epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{D}}$ 。ただし $\bullet$ は垂直合成とする。

Fact 1.4. 以上の 1 から 8 は、全て同値。

Proof. 概要だけ示す。

- $(1 \Rightarrow 3), (1 \Rightarrow 5) : D_g = G(D), C_f = F(C)$ として、 θ を C, D ごとに部分評価する。
- $(2 \Rightarrow 3), (4 \Rightarrow 5) :$ 普遍射、余普遍射の性質は、 Hom 関手自然同型の写像を召喚できる。 $x : F(X) \rightarrow D$ に対して余普遍性からくる $\epsilon_D F(\bar{x}) = x$ である一意的な射を $\bar{x} : X \rightarrow D_g$ とするとき、 $\phi_D = \overline{(-)}$ で定義する。この自然さは一意性から示すことができる。同様に $x : C \rightarrow G(Y)$ に対して、普遍性からくる $G(\hat{x})\eta_C = x$ である一意的な射を $\hat{x} : C_f \rightarrow Y$ とするとき、 $\psi_C = \widehat{(-)}$ で定義する。この自然さは一意性から示すことができる。
- $(2 \Leftarrow 3), (4 \Leftarrow 5) :$ Hom 関手自然同型を用いて、余普遍射、普遍射をそれぞれ $\epsilon_D = \phi_D^{-1}(\text{id}_{D_g}) : F(D_g) \rightarrow D, \eta_C = \psi_C^{-1}(\text{id}_{C_f}) : C \rightarrow G(C_f)$ で定義する。
- $(2 \Rightarrow 6), (4 \Rightarrow 7) :$ $D \mapsto D_g$ を関手 G へ拡大する。対象については $G(D) = D_g$, 射については $G(g : D \rightarrow D') = \overline{g\epsilon_D}$ 。ただし $\overline{(-)}$ は余普遍射の性質による一意射である。これは ϵ_D をコンポーネントとする ϵ が所定の型の自然変換であるために可能な唯一の定義であり、 G の関手性は余普遍射の性質による対応の一意性から従う。同様に、 $C \mapsto C_f$ を関手 F へ拡大する。対象については $F(C) = C_f$, 射については $F(f : C \rightarrow C') = \widehat{\eta_{C'} f}$ 。ただし $\widehat{(-)}$ は普遍射の性質による一意射である。これは η_C をコンポーネントとする η が所定の型の自然変換であるために可能な唯一の定義であり、 F の関手性は普遍射の性質による対応の一意性から従う。
- $(2 \Leftarrow 6), (3 \Leftarrow 7) :$ 関手の構造を忘却すれば明らか。ただし、 $(2 \Rightarrow 6), (3 \Rightarrow 7)$ による G, F の構成を再び行ったとき、それはもとのものに一致することに注意せよ。
- $(1 \Leftarrow 2, 3, 6) :$ $\theta_{C,D} = (\phi_D)_C$ で定義する。これは全単射である。自然さを検証すればよいが、今射に対してそれぞれ $\phi_D = \overline{(-)}, G = \overline{(-)}\epsilon$ としてよい。 ϕ_D 自体が自然変換であるので、 $\theta_{C,D} = (\phi_D)_C$ において、 D についての自然さをみればよい。 $\overline{g}f = \overline{gF(f)}$ が常に成り立つことを使えば、 $G(g)\theta(h) = \overline{g\epsilon h} = \overline{g\epsilon F(\bar{h})} = \overline{gh} = \theta(gh)$ で成り立つ。したがって、 $\theta_{C,D} = (\phi_D)_C = \overline{(-)}$ によって随伴である。明らかにこの構成は $(1 \Rightarrow 3)$ の構成に矛盾しない。
- $(1 \Leftarrow 4, 5, 7) :$ $\theta_{C,D}^{-1} = (\psi_C)_D$ で定義する。これは全単射である。自然さを検証すればよいが、今射に対してそれぞれ $\psi_C = \widehat{(-)}, F = \widehat{\eta(-)}$ としてよい。 ψ_C 自体が自然変換であるので、 $\theta_{C,D}^{-1} = (\psi_C)_D$ にお

いて、 C についての自然さをみればよい。 $\widehat{gf} = \widehat{G(g)f}$ が常に成り立つことを使うと、 $\theta^{-1}(h)F(f) = \widehat{h\eta f} = \widehat{G(\widehat{h})\eta f} = \widehat{h\widehat{f}} = \theta^{-1}(hf)$ で成り立つ。したがって、 $\theta_{C,D}^{-1} = (\psi_C)_D$ で随伴である。明らかにこの構成は $(1 \Rightarrow 5)$ の構成に矛盾しない。

- $(1,2,3,4,5,6,7 \Rightarrow 8)$: 示すべきは、 $G(\epsilon_A)\eta_{G(A)} = \text{id}_{G(A)}, \epsilon_{F(A)}F(\eta_A) = \text{id}_{F(A)}$ である。ところが今これまでの構成の整合性から $\theta_{C,D} = (\phi_D)_C = \overline{(-)}, G = \overline{(-)}\epsilon, \epsilon = \phi^{-1}(\text{id}_{G(-)}), \theta_{C,D}^{-1} = (\psi_C)_D = \overline{(-)}, F = \overline{\eta(-)}, \eta = \psi^{-1}(\text{id}_{F(-)})$ さらに恒等式 $\overline{gf} = \overline{gF(f)}, g\widehat{f} = \widehat{G(g)f}$ を全て用いることができる。これらを全て使うことで直ちに従う。
- $(1 \Leftarrow 8)$: $\theta_{C,D}(x : F(A) \rightarrow B) = G(x)\eta_A, \theta_{C,D}^{-1}(y : A \rightarrow G(B)) = \epsilon_B F(y)$ が矛盾なく全単射を定める。この構成はこれまでの他の構成と矛盾しない。例えば $\theta_{C,D}(\text{id}_{F(A)}) = \eta_A, \theta_{D,C}(\text{id}_{G(B)}) = \epsilon_B$ といった具合である。自然さは、この ϵ, η が自然変換であることから従う。 $\square$

Fact 1.5. 上記の 2,4 のケースにおいて、 D_g, C_f は *up to isomorphism* に選ばれるが、もし同型の範囲で異なるものを選択した時、構成される関手 G, F は自然同型を除いて一意である。これは随伴が自然同型を除いて一意であることと整合する。

以下では主に 1,8 のケースで随伴を検証する。 θ, ϕ, ψ の記号は集合論的全単射でありさえすればいいので、逆写像と入れ替わることがある。

2 Kleisli 圏

以下では $\overline{(-)}$ は余普遍射を意味しないものとする。

Definition 2.1. (*Kleisli 圏*) $(T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \eta : \text{id}_{\mathbb{C}} \Rightarrow T, \mu : T^2 \Rightarrow T)$ をモナドとする。このモナド T による *Kleisli 圏* $\mathcal{KL}(T)$ とは、次で定義される圏である。

$$\text{Ob}_{\mathcal{KL}(T)} = \text{Ob}_{\mathbb{C}} \quad (3)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{KL}(T)}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, TB) \quad (4)$$

$$\text{id}_A = \overline{\eta_A} \quad (5)$$

$$\overline{g} \circ_{\mathcal{KL}(T)} \overline{f} = \overline{\mu T(g)f} \quad (6)$$

ただし $\overline{(-)}$ は、 $\text{Hom}_{\mathcal{KL}(T)}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, TB)$ での個々の対応を示す。つまり $f : A \rightarrow TB \in \text{Ar}_{\mathbb{C}}$ に対して $\overline{f} : A \rightarrow B \in \text{Ar}_{\mathcal{KL}(T)}$ である。

圏である為の性質、すなわち、射合成の *unitarity, associativity* は次のように検証出来る。

$$\text{id} \overline{f} = \overline{\mu(T\eta)f} = \overline{\text{id}f} = \overline{f} \quad (7)$$

$$\overline{g} \text{id} = \overline{\mu(Tg)\eta} = \overline{\mu(\eta T)g} = \overline{\text{id}g} = \overline{g} \quad (8)$$

$$\overline{h}(\overline{g}\overline{f}) = \overline{\mu(Th)\mu(Tg)f} = \overline{\mu(\mu T)(TTh)(Tg)f} = \overline{\mu(T\mu)(TTh)(Tg)f} = \overline{\mu(T(\mu(T\mu)g))f} = \overline{(\overline{h}\overline{g})\overline{f}} \quad (9)$$

Definition 2.2. (*Kleisli 圏*) $(S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \epsilon : S \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{C}}, \delta : S \Rightarrow S^2)$ をコモナドとする。このコモナド S による *Kleisli 圏* $\mathcal{KL}(S)$ とは、次で定義される圏である。

$$\text{Ob}_{\mathcal{KL}(S)} = \text{Ob}_{\mathbb{C}} \quad (10)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{KL}(S)}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(SA, B) \quad (11)$$

$$\text{id}_A = \overline{\epsilon_A} \quad (12)$$

$$\overline{g} \circ_{\mathcal{KL}(S)} \overline{f} = \overline{gS(f)\delta} \quad (13)$$

ただし $\overline{(-)}$ は、 $\text{Hom}_{\mathcal{KL}(S)}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(SA, B)$ での個々の対応を示す。つまり $f : SA \rightarrow B \in \text{Ar}_{\mathcal{C}}$ に対して $\overline{f} : A \rightarrow B \in \text{Ar}_{\mathcal{KL}(S)}$ である。

圏である為の性質、すなわち、射合成の *unitarity, associativity* は次のように検証出来る。

$$\text{id} \overline{f} = \overline{\epsilon(Sf)} \delta = \overline{f(\epsilon S)} \delta = \overline{f \text{id}} = \overline{f} \quad (14)$$

$$\overline{g} \text{id} = \overline{g(S\epsilon)} \delta = \overline{g \text{id}} = \overline{g} \quad (15)$$

$$\overline{h}(\overline{g} \overline{f}) = \overline{h(Sg)} \delta(Sf) \delta = \overline{h(Sg)(SSf)(\delta S)} \delta = \overline{h(Sg)(SSf)(S\delta)} \delta = \overline{h(S(g(Sf)\delta))} \delta = (\overline{h\overline{g}}) \overline{f} \quad (16)$$

本当は String Diagram で表現したほうがはるかに効率が良い。

3 Eilenberg-Moore 圏

Definition 3.1. (*Eilenberg-Moore 圏*) モナド $(T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow T, \mu : T^2 \Rightarrow T)$ についての T -代数とは、対象と射の組 $(A, k_A : TA \rightarrow A)$ で次のダイアグラムを可換にするものである。

$$\begin{array}{ccccc} T^2 A & \xrightarrow{T k_A} & T A & & T A \xrightarrow{k_A} A \\ \mu \downarrow & & \downarrow k_A & \eta_A \uparrow & \nearrow \text{id}_A \\ T A & \xrightarrow{k_A} & A & & A \end{array} \quad (17)$$

また、 T -代数 $(A, k_A : TA \rightarrow A), (B, k_B : TB \rightarrow B)$ の間の準同型射とは、 $f : A \rightarrow B$ で次のダイアグラムを可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ k_A \uparrow & & \uparrow k_B \\ T A & \xrightarrow{T f} & T B \end{array} \quad (18)$$

モナド $(T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow T, \mu : T^2 \Rightarrow T)$ に関する *Eilenberg-Moore 圏* $\mathcal{EM}(T)$ とは、 T -代数たちを対象とし、 T -代数準同型を射とする圏である。

Definition 3.2. (*Eilenberg-Moore 圏*) コモナド $(S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \epsilon : S \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}, \delta : S \Rightarrow S^2)$ についての S -余代数とは、対象と射の組 $(A, h_A : A \rightarrow SA)$ で次のダイアグラムを可換にするものである。

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{h_A} & S A & & A \xrightarrow{h_A} S A \\ h_A \downarrow & & \downarrow \delta & \text{id}_A \searrow & \downarrow \epsilon_A \\ S A & \xrightarrow{S h_A} & S^2 A & & A \end{array} \quad (19)$$

また、 S -余代数 $(A, h_A : A \rightarrow SA), (B, h_B : B \rightarrow SB)$ の間の準同型射とは、 $f : A \rightarrow B$ で次のダイアグラムを可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h_A \downarrow & & \downarrow h_B \\ S A & \xrightarrow{S f} & S B \end{array} \quad (20)$$

コモナド $(S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \epsilon : S \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{C}}, \delta : S \Rightarrow S^2)$ に関する *Eilenberg-Moore* 圏 $\mathcal{EM}(S)$ とは、 S -余代数たちを対象とし、 S -余代数準同型を射とする圏である。

4 随伴

Theorem 4.1. モナド $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ についての *Kleisli* 圏 $\mathcal{KL}(T)$ と $\mathbb{C}$ の間には次の随伴が存在する。 $\mathbb{C}$ から $\mathcal{KL}(T)$ への関手 F_T が、コドメインに「自明な文脈」を構成する関手であり、左随伴である。右随伴は添加された文脈をそのまま対象の一部に引き上げる関手である。

$$F_T : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{KL}(T) \quad (21)$$

$$:: A \mapsto A \quad (22)$$

$$f : A \rightarrow B \mapsto \overline{\eta_B f} \quad (23)$$

$$G_T : \mathcal{KL}(T) \rightarrow \mathbb{C} \quad (24)$$

$$:: A \mapsto TA \quad (25)$$

$$\bar{f} : A \rightarrow B (\Leftrightarrow f : A \rightarrow TB) \mapsto \mu_B T(f) \quad (26)$$

$$\eta = \eta \quad (27)$$

$$\epsilon_A = \overline{\text{id}_{TA}} \quad (28)$$

$$\theta_{A,B}^{-1} : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, G_TB) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{KL}(T)}(F_TA, B) \quad (29)$$

$$:: f \mapsto \bar{f} \quad (30)$$

Proof. Hom 双関手自然同型で示すならば、

$$\bar{g}f(F_T h) = \overline{\mu(Tg)(\mu(Tf)\eta h)} = \overline{\mu(Tg)(\mu(\eta T)f h)} = \overline{\mu(Tg)f h} = \overline{(G_T \bar{g})f h} \quad (31)$$

普遍射自然変換の等式で示すなら、 $(\epsilon F_T) \bullet (F_T \eta) = \text{id}_{F_TA}$ はコンポーネントについて

$$\epsilon_{F_TA}(F_T \eta_A) = \overline{\text{id}_{TA} \eta_{TA} \eta_A} = \overline{\mu \text{id}_{TTA} \eta_{TA} \eta_A} = \overline{\eta_A} = \text{id}_A = \text{id}_{F_TA} \quad (32)$$

$(G_T \epsilon) \bullet (\eta G_T) = \text{id}_{G_TA}$ はコンポーネントについて、

$$(G_T \epsilon_A) \eta_{G_TA} = \mu(T \text{id}_{TA}) \eta_{TA} = \mu \eta_{TA} = \text{id}_{TA} = \text{id}_{G_TA} \quad (33)$$

□

Theorem 4.2. (*Kleisli* 圏と随伴) コモナド S によるクライスリ圏 $\mathcal{KL}(S)$ と元の圏 $\mathbb{C}$ の間には、次の随伴が存在する。 $\mathbb{C}$ から $\mathcal{KL}(S)$ への関手 G_S が、ドメインに「自明な文脈」を構成する関手であり、右随伴であ

る。左随伴は添加された文脈をそのまま対象の一部に引き上げる関手である。

$$G_S : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{KL}(S) \quad (34)$$

$$:: A \mapsto A \quad (35)$$

$$f : A \rightarrow B \mapsto \overline{f\epsilon_A} \quad (36)$$

$$F_S : \mathcal{KL}(S) \rightarrow \mathbb{C} \quad (37)$$

$$:: A \mapsto SA \quad (38)$$

$$\overline{f} : A \rightarrow B (\Leftrightarrow f : SA \rightarrow B) \mapsto S(f)\delta_A \quad (39)$$

$$\eta_A = \overline{\text{id}_{SA}} \quad (40)$$

$$\epsilon = \epsilon \quad (41)$$

$$\theta_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{KL}(S)}(G_SA, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, F_SB) \quad (42)$$

$$:: \overline{f} \mapsto f \quad (43)$$

Proof. Hom 双関手自然同型で示すならば、

$$(G_Sg)\overline{fh} = \overline{(g\epsilon(Sf)\delta)(Sh)\delta} = \overline{(gf(\epsilon S)\delta)(Sh)\delta} = \overline{gf(Sh)\delta} = \overline{gh(F_Sh)} \quad (44)$$

普遍射自然変換の等式で示すなら、 $(\epsilon F_S) \bullet (F_S\eta) = \text{id}_{F_SA}$ はコンポーネントについて

$$\epsilon_{F_SA}(F_S\eta_A) = \epsilon_{SA}(\text{id}_{SA})\delta = \epsilon_{SA}\delta = \text{id}_{SA} = \text{id}_{F_SA} \quad (45)$$

$(G_S\epsilon) \bullet (\eta G_S) = \text{id}_{G_SA}$ はコンポーネントについて、

$$(G_S\epsilon_A)\eta_{G_SA} = \overline{\epsilon_A\epsilon_{SA}\text{id}_{SA}} = \overline{\epsilon_A\epsilon_{SA}\text{id}_{SSA}\delta} = \overline{\epsilon_A} = \text{id}_A = \text{id}_{G_SA} \quad (46)$$

□

直観的には、自明な構成が左随伴であってほしいような気がするが、今モナドコモナドが双対概念であるせいでそうはなっていないことに注意。

Theorem 4.3. (*Eilenberg-Moore* 圏と随伴) モナド T による *Eilenberg-Moore* 圏 $\mathcal{EM}(T)$ と元の圏 $\mathbb{C}$ の間には、次で定められる随伴が存在する。 $\mathbb{C}$ から $\mathcal{EM}(T)$ への関手 F^T が、「自由な代数」を生成する関手であり、左随伴である。右随伴はその代数を忘却する関手である。

$$F^T : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{EM}(T) \quad (47)$$

$$:: A \mapsto (TA, \mu_A) \quad (48)$$

$$f \mapsto Tf \quad (49)$$

$$G^T : \mathcal{EM}(T) \rightarrow \mathbb{C} \quad (50)$$

$$:: (A, k_A) \mapsto A \quad (51)$$

$$f \rightarrow f \quad (52)$$

$$\eta = \eta \quad (53)$$

$$\epsilon_{(A, k_A)} = k_A \quad (54)$$

ただし (A, k_A) は *Eilenberg-Moore* 圏の対象、つまり T -代数である。

Proof. 普遍射自然変換の等式で示すなら、 $(\epsilon F^T) \bullet (F^T \eta) = \text{id}_{F^T A}$ はコンポーネントについて

$$\epsilon_{F^T A}(F^T \eta_A) = \mu_A(T\eta) = \text{id}_{TA} = \text{id}_{F^T A} \quad (55)$$

$(G^T \epsilon) \bullet (\eta G^T) = \text{id}_{G^T A}$ はコンポーネントについて、

$$(G^T \epsilon_{(A, k_A)}) \eta_{G^T(A, k_A)} = k_A \eta_A = \text{id}_A = \text{id}_{G^T(A, k_A)} \quad (56)$$

なおホムセット bijection は

$$\theta_{A, (B, k_B)} : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, G^T(B, k_B)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{EM}(T)}(F^T A, (B, k_B)) \quad (57)$$

$$\theta_{A, (B, k_B)} :: f : A \rightarrow B \mapsto k_B(Tf) : TA \rightarrow B \quad (58)$$

$$\theta_{A, (B, k_B)}^{-1} :: g : TA \rightarrow B \mapsto g\eta_A : A \rightarrow B \quad (59)$$

実際、

$$k_B(Tf)\eta_A = k_B\eta_B f = \text{id}_B f = f \quad (60)$$

$$k_B(T(g\eta_A)) = k_B(Tg)(T\eta_A) = g\mu_A(T\eta_A) = g \quad (61)$$

□

Theorem 4.4. (*Eilenberg-Moore* 圏と随伴) コモナド S による *Eilenberg-Moore* 圏 $\mathcal{EM}(S)$ と元の圏 $\mathbb{C}$ の間には、次で定められる随伴が存在する。 $\mathbb{C}$ から $\mathcal{EM}(S)$ への関手 G^S が、「自由な余代数」を生成する関手であり、右随伴である。左随伴はその代数を忘却する関手である。

$$G^S : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{EM}(S) \quad (62)$$

$$:: A \mapsto (SA, \delta_A) \quad (63)$$

$$f \mapsto Sf \quad (64)$$

$$F^S : \mathcal{EM}(S) \rightarrow \mathbb{C} \quad (65)$$

$$:: (A, h_A) \mapsto A \quad (66)$$

$$f \mapsto f \quad (67)$$

$$\eta_{(A, h_A)} = h_A \quad (68)$$

$$\epsilon = \epsilon \quad (69)$$

ただし (A, h_A) は *Eilenberg-Moore* 圏の対象、つまり S -余代数である。

Proof. 普遍射自然変換の等式で示すなら、 $(\epsilon F^S) \bullet (F^S \eta) = \text{id}_{F^S A}$ はコンポーネントについて、

$$\epsilon_{F^S(A, h_A)}(F^S \eta_{(A, h_A)}) = \epsilon_A h_A = \text{id}_A = \text{id}_{F^S(A, h_A)} \quad (70)$$

$(G^S \epsilon) \bullet (\eta G^S) = \text{id}_{G^S A}$ はコンポーネントについて、

$$(G^S \epsilon_A) \eta_{G^S A} = (S\epsilon_A) \delta_A = \text{id}_{SA} = \text{id}_{G^S A} \quad (71)$$

なおホムセットは bijection は

$$\theta_{(A, h_A), B} : \text{Hom}_{\mathcal{EM}(S)}((A, h_A), G^S B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F^S(A, h_A), B) \quad (72)$$

$$\theta_{(A, h_A), B} :: f : A \rightarrow SB \mapsto \epsilon_B f : A \rightarrow B \quad (73)$$

$$\theta_{(A, h_A), B}^{-1} :: g : A \rightarrow B \mapsto (Sg)h_A : A \rightarrow SB \quad (74)$$

実際、

$$(S(\epsilon_B f))h_A = (S\epsilon_B)(Sf)h_A = (S\epsilon_B)\delta_B f = f \quad (75)$$

$$\epsilon_B(Sg)h_A = g\epsilon_A h_A = g\text{id}_A = g \quad (76)$$

□

5 比較定理

Theorem 5.1. 随伴 $F \dashv G$ とそれに伴う普遍射自然変換 $\eta : \text{id}_{\mathbb{C}} \Rightarrow GF, \epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{D}}$ があるとき、 $(GF, \eta, G\epsilon F)$ はモナドであり、 $(FG, \epsilon, F\eta G)$ はコモナドである。以下でこれを標準的構成と呼ぶ。

Proof. String Diagram を書くべきである。明示的には次の 2-cell 変形によって (コ)モノイドダイアグラムが満足される。ただし $\bullet$ を垂直合成、 $\circ$ を水平合成としている。

$$(G\epsilon F) \bullet GF\eta = G \circ ((\epsilon F) \bullet (F\eta)) = G \circ \text{id}_F = \text{id}_{GF} \quad (77)$$

$$(G\epsilon F) \bullet \eta GF = ((G\epsilon) \bullet (\eta G)) \circ F = \text{id}_G \circ F = \text{id}_{GF} \quad (78)$$

$$(G\epsilon F) \bullet (FGG\epsilon F) = (G\epsilon F) \bullet (G\epsilon FGF) \quad (79)$$

$$FG\epsilon \bullet (F\eta G) = F \circ ((G\epsilon) \bullet (\eta G)) = F \circ \text{id}_G = \text{id}_{FG} \quad (80)$$

$$\epsilon FG \bullet (F\eta G) = ((\epsilon F) \bullet (F\eta)) \circ G = \text{id}_F \circ G = \text{id}_{FG} \quad (81)$$

$$(F\eta GFG) \bullet (F\eta G) = (FGF\eta G) \bullet (F\eta G) \quad (82)$$

□

この計算を追うべきではない。String Diagram を書き、それが 2-cell の計算として明らかであることを認識すべきである。

この構成を前節に適用すると直ちにつぎが分かる。

Theorem 5.2. 前節の $\mathcal{KL}(T), \mathcal{KL}(S), \mathcal{EM}(T), \mathcal{EM}(S)$ と $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ の間の随伴は、標準的構成によってもとのモナド、コモナド T, S を再生する。

そこで、あるモナドまたはコモナドを得た時に、それを「分解する」ような随伴たちを比較したい。つまり、その随伴はいずれもモナド、コモナドを標準的構成で再生するようなものである。まず随伴たちの成す圏を作る。

Definition 5.3. $F_1 : \mathbb{C}_1 \rightarrow \mathbb{D}_1, G_1 : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{C}_1$ が随伴 $F_1 \dashv G_1$ を成し、 $F_2 : \mathbb{C}_2 \rightarrow \mathbb{D}_2, G_2 : \mathbb{D}_2 \rightarrow \mathbb{C}_2$ が随伴 $F_2 \dashv G_2$ をなしているとする。関手のペア $A : \mathbb{C}_1 \rightarrow \mathbb{C}_2, B : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$ がこれらの随伴のマッピングであるとは、 $F_2 A = B F_1, A G_1 = G_2 B$ かつ、 $A\eta_1 = \eta_2 A$ または $B\epsilon_1 = \epsilon_2 B$ であることとする (実はこの二つは同値である)。

本当に同値だろうか？ 次の String Diagram を chase!

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} A \quad F_2 \quad G_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \end{array} = \begin{array}{c} A \quad F_2 \quad G_2 \\ | \quad | \quad | \\ A \quad F_2 \quad G_2 \end{array}
\end{array} \tag{83}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} F_1 \quad B \quad G_2 \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} = \begin{array}{c} F_1 \quad B \quad G_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}
\end{array} \tag{84}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} B \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ G_1 \quad A \quad F_2 \end{array} = \begin{array}{c} B \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ G_1 \quad A \quad F_2 \end{array}
\end{array} \tag{85}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} B \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ G_1 \quad F_1 \quad B \end{array} = \begin{array}{c} B \\ | \quad | \quad | \\ G_1 \quad F_1 \quad B \end{array}
\end{array} \tag{86}$$

同値でしたね。

随伴のマップのこの条件は、図的直観としては、 η, ϵ を関手を越えて前後の圏に輸送することができるような関手の交点のことである。

Definition 5.4. 随伴と随伴のマップは圏をなす。これを **Adj** として随伴圏とする。

Definition 5.5. $\mathbb{C}$ 上のモナド T を先の標準的構成で与えるような随伴による **Adj** 部分圏を (一般的ではないが) T 圏とする。同様に $\mathbb{D}$ 上のコモナド S を先の標準的構成で与えるような随伴による **Adj** 部分圏を (一般的でないが) S 圏とする。これらの随伴のマップの一方は $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ 上の恒等関手である。

すなわち、この T 圏ではすべての対象、つまり随伴は $GF = T, G\epsilon F = \mu, \eta = \eta$ のように標準的構成で T に同じくし、また $B : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$ がこの射である時、それは $F_2 = BF_1, G_1 = G_2B$ を満たす。双対に S 圏ではすべての対象、つまり随伴は $FG = S, F\eta G = \delta, \epsilon = \epsilon$ のように標準的構成で S に同じくし、また $A : \mathbb{C}_1 \rightarrow \mathbb{C}_2$ がこの射である時、それは $F_2A = F_1, AG_1 = G_2$ を満たす。随伴のマップであることについてののこりの自然変換に関する条件は、モナドコモナドの標準的構成に対して、 B, A と関手についての等式それ自体の自然同型が、モナドコモナドの「自己準同型」のように振る舞うことを意味する。このことは String Diagram で確かめる事ができる。

この「あるモナドの自己準同型」をなす随伴の圏の中で、前節で構成した随伴は特別な地位をもつ。

Theorem 5.6. T 圏において、 $\mathcal{KL}(T)$ との随伴は *initial* であり $\mathcal{EM}(T)$ との随伴は *terminal*

Proof. $F \dashv G, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}, G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, \eta : \text{id}_{\mathbb{C}} \Rightarrow GF, \epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{D}}$ で $T = GF, \mu = G\epsilon F$ を満たす随伴を任意に取る。

$\mathcal{KL}(T)$ の普遍性に関しては、関手 $B : \mathcal{KL}(T) \rightarrow \mathbb{D}$ で $G_T = GB, BF_T = F$ を満たすものが一意的に構成できればよい。条件から要求されている仕様は次のようなものとなる。

$$B(A) = F(A) \quad (87)$$

$$B(\overline{\eta f}) = F(f) \quad (88)$$

$$G(B(A)) = GFA \quad (89)$$

$$G(B(\overline{f})) = \mu(GFf) \quad (90)$$

第一の条件から対象の写像は $F(A)$ しか可能性はない。このとき第三の条件は自動的に満たされる。射の写像を確定しよう。第四の条件を変形することでこれを得る。 $f : X \rightarrow TY$ に対して第四の条件の両辺をそれぞれ変形すると

$$\epsilon_{FY} F(G(B(\overline{f}))\eta_X) = \epsilon_{FY} (FGB\overline{f})(F\eta_X) = (B\overline{f})(\epsilon_{FX})(F\eta_X) = B\overline{f} \quad (91)$$

$$\epsilon_{FY} F(\mu(Tf)\eta_X) = \epsilon_{FY} F(\mu\eta_{TY}f) = \epsilon_{FY} (Ff) \quad (92)$$

なので、可能性は $B\overline{f} = \epsilon_{FY} F(f)$ のみである。この定義は第二の条件を自動的に従える。

$\mathcal{EM}(T)$ の普遍性に関しては、 $B : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{EM}(T)$ で $G^T B = G, F^T = BF$ を満たすものが一意的に構成できればよい。条件から要求されている仕様は次のようなものとなる。

$$G(A) = G^T(B(A)) \quad (93)$$

$$G(f) = B(f) \quad (94)$$

$$(TA, \mu_A) = B(F(A)) \quad (95)$$

$$GFf = BFf \quad (96)$$

第二の条件から、射の写像は $G(f)$ しかない。このとき第四の条件は自動的に満たされる。対象の写像を確定しよう。第一の条件から、それは $(GA, -)$ の形をした T 代数である。この空席の構造射を $k_{GA} : TGA \rightarrow GA$ としよう。 k_{GA} が GA 上の構造射であることは、同時に $F^T(GA) = (TGA, \mu_{GA}) \rightarrow (GA, k_{GA})$ の T 代数準同型でもあることを意味する。ところで $F^T(GA) = (TGA, \mu_{GA}) \rightarrow (GA, -)$ の任意の T 代数準同型は $F^T \dashv G^T$ 随伴によって $\text{Hom}(GA, GA)$ の射へと移るが、この時それが GA 上の構造射であれば、

$$G^T(k_{GA})\eta_{GA} = k_{GA}\eta_{GA} = \text{id}_{GA} \quad (97)$$

となる。随伴のホムセット対応は bijection だから、 T 代数準同型かつ GA 構造射であるような射を見つけさえすれば、それが唯一であり、 k_{GA} である。そこで、 $k_{GA} = G(\epsilon_A) : TGA \rightarrow GA$ としてみよう。これは実際に構造射としての資格をもち、 $\mu = G\epsilon F$ より第三の条件も満たすので所要のものである。

□

特に、 $\mathcal{KL}(T) \rightarrow \mathcal{EM}(T)$ の随伴のマッピングが唯一存在するが、それは $A \mapsto (TA, \mu_A), \overline{f} \mapsto \mu(Tf)$ である。

Theorem 5.7. S 圏において、 $\mathcal{KL}(S)$ との随伴は *initial* であり $\mathcal{EM}(S)$ との随伴は *terminal*

Proof. $F \dashv G, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}, G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, \eta : \text{id}_{\mathbb{C}} \Rightarrow GF, \epsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{D}}$ で $S = FG, \delta = F\eta G$ を満たす随伴を任意に取る。

$\mathcal{KL}(T)$ の普遍性に関しては、関手 $B : \mathcal{KL}(S) \rightarrow \mathbb{D}$ で $F_S = FB, BG_S = G$ を満たすものが一意的に構成できればよい。条件から要求されている仕様は次のようなものとなる。

$$B(A) = G(A) \quad (98)$$

$$B(\bar{f}\epsilon) = G(f) \quad (99)$$

$$F(B(A)) = FGA \quad (100)$$

$$F(B(\bar{f})) = (FGf)\delta \quad (101)$$

第一の条件から対象の写像は $G(A)$ しか可能性がない。このとき第三の条件は自動的に満たされる。射の写像を確定しよう。第四の条件を変形することでこれを得る。 $f : SX \rightarrow Y$ に対して第四の条件の両辺をそれぞれ変形すると

$$G(\epsilon_Y F(B(\bar{f})))\eta_{GX} = (G\epsilon_Y)(GFB\bar{h})\eta_{GX} = (G\epsilon_Y)\eta_{GY}(B\bar{h}) = B\bar{f} \quad (102)$$

$$G(\epsilon_Y(FGf)\delta)\eta_{GX} = G(f\epsilon_{TX}\delta)\eta_{GX} = (Gf)\eta_{GX} \quad (103)$$

なので、可能性は $B\bar{f} = G(f)\eta_{GX}$ のみである。この定義は第二の条件を自動的に従える。

$\mathcal{EM}(S)$ の普遍性に関しては、 $B : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{EM}(S)$ で $F^S B = F, G^S = BG$ を満たすものが一意的に構成できればよい。条件から要求されている仕様は次のようなものとなる。

$$F(A) = F^S(B(A)) \quad (104)$$

$$F(f) = B(f) \quad (105)$$

$$(SA, \delta_A) = B(G(A)) \quad (106)$$

$$FGf = BGf \quad (107)$$

第二の条件から、射の写像は $F(f)$ しかない。このとき第四の条件は自動的に満たされる。対象の写像を確定しよう。第一の条件から、それは $(FA, -)$ の形をした S 余代数である。この空席の構造射を $h_{FA} : FA \rightarrow SFA$ としよう。 h_{FA} が FA 上の構造射であることは、同時に $(FA, h_{FA}) \rightarrow (SFA, \delta_{FA}) = G^S(FA)$ の S 余代数準同型でもあることを意味する。ところで $(FA, -) \rightarrow (SFA, \delta_{FA}) = G^S(FA)$ の任意の S 余代数準同型は $F^S \dashv G^S$ 随伴によって $\text{Hom}(FA, FA)$ の射へと移るが、この時それが FA 上の構造射であれば、

$$\epsilon_{FA} F^S(h_{FA}) = \epsilon_{FA} h_{FA} = \text{id}_{FA} \quad (108)$$

となる。随伴のホムセット対応は bijection だから、 S 余代数準同型かつ FA 構造射であるような射を見つけさえすれば、それが唯一であり、 h_{FA} である。そこで、 $h_{FA} = F(\eta_A) : FA \rightarrow SFA$ としてみよう。これは実際に構造射としての資格をもち、 $\delta = F\eta G$ より第三の条件も満たすので所要のものである。

□

特に、 $\mathcal{KL}(S) \rightarrow \mathcal{EM}(S)$ の随伴のマッピングが唯一存在するが、それは $A \mapsto (SA, \delta_A), \bar{f} \mapsto (Sf)\delta$ である。

6 要するに

こういうことである。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{EM}(GF) & & \mathcal{EM}(FG) \\
 \uparrow \dashv & \swarrow \text{---} & \nearrow \text{---} \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{D} \\
 \downarrow \vdash & \xleftarrow{G} & \downarrow \vdash \\
 \mathcal{KL}(GF) & & \mathcal{KL}(FG)
 \end{array}
 \quad (109)$$

- モナドの観点から：あるモナドについて、それを分解する随伴を手に入れたとする。このとき、モナドによって得られる $\mathcal{KL}(T), \mathcal{EM}(T)$ の間に、その随伴の対応する圏を通る関手が、以上のダイアグラムを可換にするように唯一つ配置される。
- 随伴の観点から：ある随伴について、その標準的モナドによる $\mathcal{KL}(T), \mathcal{EM}(T)$ を作ると、それらとの間に、以上のダイアグラムを可換にするような関手が唯一つ配置される。

参考文献

- [1] Saunders.MacLane:Categories for the working mathematician,2nd edition
- [2] 大熊 正：圏論, 槇書店,1979
- [3] Pierre-Louis.Curien:Category theory: a programming language-oriented introduction ,available at <https://www.irif.fr/~mellies/mpri/mpri-ens/articles/curien-category-theory.pdf>