

[1] 以下に 3次元デカルト座標系 で表された諸量を 3次元極座標 の変数 ( 及び単位ベクトル ) を用いて表せ。

(1)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$$

(2)

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

(3) ラプラシアン

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ただし、(2) の結果を必ず用いること。

[2] 万有引力

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}$$

のポテンシャルエネルギーを求めよ。(基準点を無限遠方とせよ。) その際、[1] の(1) の結果を使ってまず、

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$$

示し、利用すること。

[3]

(1) 単位長さあたりの質量 ( 線密度 ) が  $\rho$  の無限に長い線から距離  $R$  にある質量  $M$  の物体に働く万有引力の大きさは  $2G\rho M/R$  であることを示せ。

(2) 線密度が一定で、全質量  $M$ 、半径  $R$  の円輪がある。このとき、円輪の中心を通り輪の面に垂直な直線上の質量  $m$  の物体に働く万有引力を求めよ。

(3) 面密度が一定での全質量  $M$ 、半径  $R$  の円盤がある。このとき、円盤の中心を通り、円盤に垂直な直線上の質量  $m$  の物体に働く万有引力を求めよ。

(4) (2)、(3) の解から、それぞれ、半径  $R$  の大きさに比べて十分離れた地点における万有引力を求め、その結果からなにが言えるか考えよ。

[4] 長さ  $2L$  の線の垂直二等分線上での座標  $r$  の点を考える。線の質量は  $M$  で、座標原点は線上にあるとする。

(1) 点  $r$  にある質量  $m$  の質点のポテンシャルエネルギーを求めよ。ただし、ポテンシャルの基準点を無限遠方にとり、その値をゼロとせよ。

(2)  $r$  にある質点に働く万有引力を向きも含めて求めよ。

(3) (1) で求めた結果は、 $r \gg L$  のとき、 $U \approx -GmM/r$  になることを示せ。

[5] 一様な密度で質量  $M$ 、半径  $R$  の球体がある。球体外部の質量  $m$  の質点に働く万有引力を求めよ。