物理演習問題（９） ６月１５日

[1] 長さ 0.4[m] の糸に 0.1[kg] のおもりをつけた振り子について以下の問いに答えよ。なお重力加速度は簡単のため $g = 10$[m/s] とする。

(1) 振動の周期を求めよ。

(2) この振り子の最大の振れ角が 0.1 ラジアン (約 6 度) のとき、おもりの速さが最大になるのはいつでその値はどれだけか？

[2] 物体が速度に比例する抵抗を受けて運動するとき、その運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -bv, \qquad\qquad b > 0$$

で与えられる。これは定数係数の斉次（同次）線形微分方程式であるから、解を指数関数 $e^{\lambda t}$ の形に仮定して解いてみよ。

[3] ばねに結ばれた質点が、ばねから受ける質点の変位に比例した力の他に、速度に比例した抵抗をも受けながら振動するときの質点の運動を調べたい。一次元の運動のみ考察するとすれば、運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

と書く事ができる。この運動方程式を以下の方法によって解いていこう。

(1) $\omega = 0$ として方程式を見直すと、速度に比例した大きさの抵抗力が働く場合の運動方程式になっていることがわかる。このとき $x(t) = \mathrm{e}^{-2\gamma t}$ が解になっていることを方程式に代入することによって確かめる。

(2) 問題としている方程式は、(1) にさらに振動を引き起こすと思われる変位に比例した力の項が付け加わっている。そこで求める解は減衰のほかになんらかの時間変化があると予想し、試みに解を $x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}y(t)$ とおき（λ は定数とする。）、$y(t)$ に関する方程式を求める。

(3) (2) で求めた方程式の $\dot{y}$ の係数を 0 とおけるとしたときの定数 λ に対する条件を求める。

(4) (3) の条件のもとでの $y(t)$ に関する微分方程式を解こう。この方程式には、$\ddot{y}$ と y の項があるが、y の係数を (i) 正とする (ii) 負とする (iii) 0 とする の３通りに場合分けをし、それぞれの場合につき、一般解 $y(t)$ を求める。

(5) (3) の条件および (4) で求めた $y(t)$ の解を (2) の変数の置き換えの式に代入することによって、$x(t)$ に関する一般解を求める。