

[1] 以下の Newton の方程式に エネルギー積分を行う事により、力学的エネルギー保存則を導け。

(1) 一様な重力の元での運動 $m\ddot{z} = -mg$

(2) バネの単振動 $m\ddot{x} = -kx$

[2] (単振り子) 長さ l の糸でつるされた質量 m の物体を初速度 v_0 で水平方向に投げ出す。物体が円運動をするために初速度に課される条件を求めよ。ただし、エネルギー保存則を用い、糸の張力に着目すること。

[3] 2次元平面で、点 A (x_0, y_0) から、点 B $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ($\Delta x, \Delta y$ は正の微量とする。) に達する以下の 2 つの経路を考える。

経路 I: 点 A から、 X 軸に平行に点 P $(x_0 + \Delta x, y_0)$ に達し、そこから点 B に至る。

経路 II: 点 A から、 Y 軸に平行に点 Q $(x_0, y_0 + \Delta y)$ に達し、そこから点 B に至る。

このとき、力 F で物体を運ぶ仕事を、2 つの経路それぞれに沿って計算することにより、力 F が保存力であるためには条件

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

が成立することを示せ。

ヒント：

たとえば、点 A から点 P に至る仕事は、 $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F_x(x, y_0) dx$ であるが、ここで、変数変換 $x' = x - x_0$ を行う。 x' は $x' < \Delta x$ をみたす微小領域しか変化しないことを利用し、被積分関数を以下のように "点 A (x_0, y_0) の回りで"、Taylor 展開する。

$$F_x(x_0 + x', y_0) = F_x(x_0, y_0) + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} x' + \cdots$$

[5] ポテンシャルが

$$U = -\frac{\lambda}{2a} \{1 - (1 - e^{-ax})^2\}$$

で与えられるとき、運動が周期的であるための条件、および、微小振動における周期を求めよ。(λ および、 a は正の定数とする。)

[6] 質量 m の自動車が速さ v で走っていた。この自動車に大きさ F の一定の摩擦力をかけたら、距離 L だけ走って止まった。これらの量の間の関係式を求めよ。また自動車の速さが 2 倍になると、停止するまでに要する距離は何倍になるか。