物理演習問題（１０）　２００３年６月２３日

[1]
(1) Eulerの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を示せ。
(2) 次の値を計算せよ。

$$(a)\ e^{i\pi}, \qquad (b)\ e^{\frac{i\pi}{2}}, \qquad (c)\ e^{\frac{-i\pi}{3}}, \qquad (d)\ e^{-1+\frac{i\pi}{4}}$$

[2]
(1) 任意の複素数$z = x + i\,y$は（x、yは実数）

$$z = re^{i\theta}$$

と表せることを示し、x、yとr、θとの間の関係式を求めよ。
(2) この複素数を複素平面（ガウス平面）上に図示せよ。
(3) zの共役複素数z^*はどのように表されるか？
(4) 次の複素数zを複素平面上に図示し、偏角θと絶対値rを求め、$z = re^{i\theta}$の形で表せ。さらに共役複素数を求めよ。

$$(a)\ z = 1, \quad (b)\ z = -\frac{1}{2}i, \quad (c)\ z = 1 + i, \quad (d)\ z = \sqrt{3} - i, \quad (e)\ z = 0$$

[3]　バネ定数kのばねにつけられ重力のもとで鉛直に運動する質量Mの物体に対する運動方程式を書け。重力は、（１）振動の周期、および（２）振動の中心、にどのような影響を及ぼすか？

[4]　２次元$X-Y$平面上で、１点からの距離に比例する引力の作用のもとに運動する物体を考える。力の中心を原点に選べば、ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2\,\boldsymbol{r}}{dt^2} = -k\boldsymbol{r}$$

で与えられる。
(1) 運動方程式を成分で書け。（$\omega^2 = k/m$とせよ。）
(2) 運動方程式を解き、解が

$$x = a\sin(\omega t + \delta), \qquad y = b\sin(\omega t + \varepsilon), \qquad (a, b, \delta, \varepsilon\text{は定数})$$

となることを示せ。
(3) 物体の軌道の方程式が

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\delta - \varepsilon) = \sin^2(\delta - \varepsilon)$$

となることを示せ。これは一般に楕円を表している。
(4) 初期条件を、xに関し$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = \omega$ととり、$y$に関しては(i) $y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \omega$、(ii) $y(0) = 1/\sqrt{2},\ \dot{y}(0) = \omega/\sqrt{2}$、(iii) $y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0$ととったとき、それぞれ、どのような軌道が得られるか？

[参考] このような２つの単振動を合成した軌道の事を、リサジュー(Lissajous)図形と言う。一般には、xとyの角振動数がω_x、ω_yと異なったものも含み、両者の比$\omega_x : \omega_y$が有理数の場合に閉じた図形が得られる。裏にリサジュー図形の例を表にして示しておく。