二項分布から正規分布へ（暫定版）

福地俊夫*

2012 年 8 月 23 日

目次

* URL: http://www.asahi-net.or.jp/~yh8t-fkc/su/

1　はじめに

統計分析において正規分布が重要であることは言うまでもない。その正規分布の確率密度関数の数式は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

である。μ（「ミュー」と読む）は平均値、σ^2（「シグマ」と読む）は分散（つまり σ は標準偏差）を表している。標準形は $\mu = 0$、$\sigma^2 = 1$ と考える。

数学から離れていた筆者はこの数式を最初に見たとき、本当に驚いた。こんな複雑な数式があるものかと。当時はネイピア数 e の意味も分かっていなかったと思う。

そして、なぜかこの数式を自分の頭で分かりたいという気持ちが沸々と沸いてきた。

様々な本に正規分布の考え方や使い方に関する説明は記されている。しかし、正規分布の確率密度関数がなぜこのような数式で表わされるのか、一般の人にも分かるレベルの詳細な説明を見たことがない。

ここで行う説明は、ただ一つ。二項分布から正規分布への数式の変形だけである。ただし、数学的な厳密さを追究したら切りがないし、それは筆者の力では到底無理なので、高校レベルの知識をもっている人がどうにか納得できるような説明を試みた。筆者の勝手なイメージや大雑把な点も多々あると思うがご容赦願いたい。

ここの説明は高校レベルの基本的な数学知識があることを前提している。説明に必要な高校レベルを超える知識に関しては後半にごく簡単な説明を入れてある。

2　二項分布から正規分布へ

2.1　二項分布

まずは二項分布である。二項分布を関数 $W(x)$ で表すと、

$$W(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

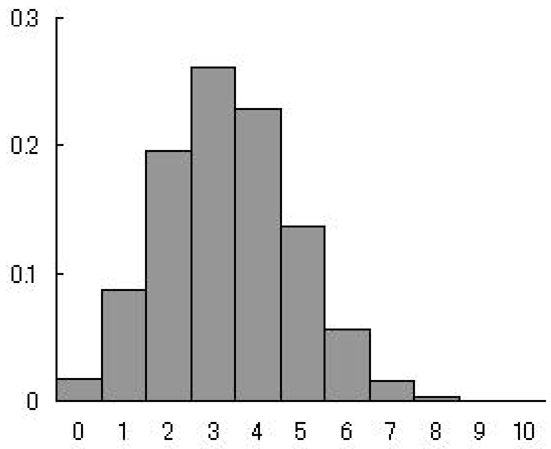
である。p は確率を表している。

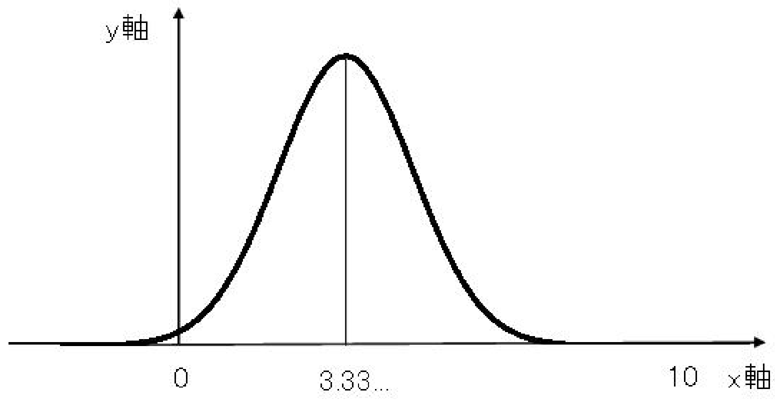
なぜ二項分布から始めるかというと、n を無限に大きくし近似したものが正規分布だか

らである。正規分布は不確実性のある出来事を確率を用いて分析するときに頻繁に出てくるが、二項分布も同様に考えられるというわけだ。

具体的に考えてみよう。

例えば、表が出る確率 $\frac{1}{3}$、裏が出る確率 $\frac{2}{3}$ のいびつな形のコインが 10 枚ある。10 枚のコインを一度に投げて出る表の枚数を横軸 x にして（つまり、左端から 1 枚、2 枚となり、いちばん右端は 10 枚）、縦軸にその確率（どの枚数がいちばん出やすいか）をとってグラフ化してみると、正規分布のグラフとほとんど重なる。この場合、平均値（= 期待値、3.1 参照）は $10 \times \frac{1}{3} = 3.333...(\mu = np)$ 回となる（この式については 3.3, 3.4 で説明）ので、そこがいちばんグラフの高い所となる。





別の例を挙げる。赤い玉 1 つ、白い球 2 つが入っている、外から見えない袋がある。この袋から中を見ずに 1 つ選ぶことにしよう。選んだ玉は玉の色を確認したら、すぐに袋に戻す。この動作を 10 回繰り返す。

赤い玉を選ぶ確率を考えた場合、コインの例とまったく同じグラフになる。すなわち、

平均値（= 期待値）は $10 \times \frac{1}{3} = 3.333...(\mu = np)$ 回となるので、そこがいちばんグラフの高い所となる。

実際には 3.333... 枚、3.333... 回はあり得ないが、連続した量と仮定する。

一般化して述べると、関数 $f(x)$ を「n 枚コインを投げた時、表（いびつなコインで確率 $\frac{1}{3}$）が x 枚出る確率」「当たる確率 $\frac{1}{3}$ のくじを n 回引いて、当たりが x 回出る確率」と考え $f(x)$ のグラフを描き、n を $+\infty$ に近付けていくと、正規分布のグラフになるというわけだ。

2.2 二項分布からの変形

では、二項分布から数式を作成していこう。

二項分布を関数 $W(x)$ で表す。

$$W(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

1 つの項の確率を p と考えれば（例えば表)、もう 1 つの項は $1-p$ となる（例えば裏)。n は先ほどの例 (2.1 を参照) で考えると、投げるコインの枚数、x は出現する表（確率 p）の数である。

ここから、数式を変形していく。

$$W(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

両辺の対数をとる。対数の性質を利用し式の変形を行う。

$$\log W(x) = \log n! - \log x! - \log{(n-x)!} + x \log p + (n-x) \log{(1-p)}$$

上記を $x = \mu$ の周辺で、テイラー展開 (4.1 を参照) する。

2.3 $\log{(k!)}$ の微分

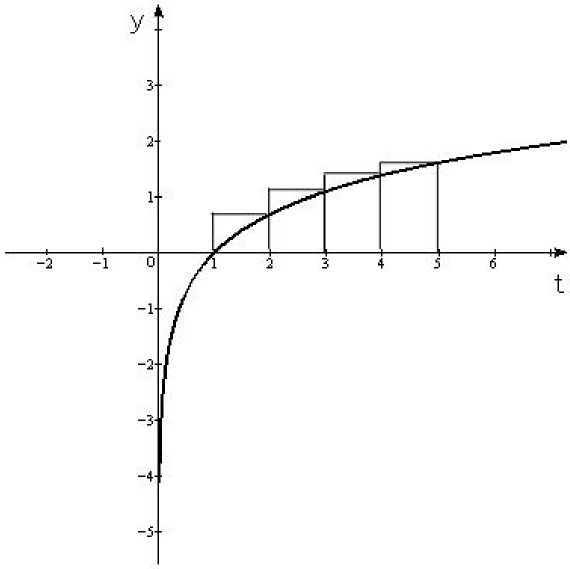
テイラー展開 (4.1 を参照) で微分するときに、$\log x!$ を変形しなくてはいけない。そこで以下の証明を行う。

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\int_1^k \log t dt}{\log k!} = 1$$

まず、

$$\log{(k-1)!} < \int_1^k \log t dt < \log k!$$

の不等式を挟み撃ちの原理で証明する。なぜ上記の不等式が成立するのか。



$f(t) = \log t$ のグラフを見てみよう。さらに 1 から k までの定積分を考える。例えば、$k = 5$ の場合、1 から 5 までの定積分は $\log{(5-1)!}$ よりも大きくなる。$\log 4! = \log 4 + \log 3 + \log 2 + \log 1$ であり、それぞれの長方形の面積の横を 1 と考えればよい。ちなみに $\log 1 = 0$ である。

$\log k!$ も同様に考えれば、1 から k までの定積分よりも大きくなることが分かる。そこで、不等式が成立する。

では、不等式を変形していこう。それぞれを $\log k!$ で割る ($\log k! > 0$)。

$$\frac{\log{(k-1)!}}{\log k!} < \frac{\int_1^k \log t dt}{\log k!} < \frac{\log k!}{\log k!}$$

右辺は言うまでもなく 1 である。

左辺を考えてみよう。

$$\frac{\log{(k-1)!}}{\log k!}$$

例えば、$k = 4$ と代入してみる。

$$\frac{\log 3+\log 2+\log 1}{\log 4+\log 3+\log 2+\log 1} = \frac{\log 4+\log 3+\log 2+\log 1-\log 4}{\log 4+\log 3+\log 2+\log 1}$$
$$= 1-\frac{\log 4}{\log 4+\log 3+\log 2+\log 1}$$

これを一般化して k で表す。

$$\frac{\log{(k-1)!}}{\log k!} = 1-\frac{\log k}{\log k!}$$

ここで、

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\log k}{\log k!} = 0$$

の証明を行う。

$$\log k! > \log k+\log{(k-1)}+\log{(k-2)}+\cdots+\log\left[\frac{k}{2}\right] > \left(\frac{k}{2}-1\right)\log\left[\frac{k}{2}\right]$$

が成立。$\left[\frac{k}{2}\right]$ は$\frac{k}{2}$ を超えない最大の整数（例えば $k=5$ のとき 2 となる）。k に具体的な数値を入れてみると分かるだろう。

$$0<\frac{\log k}{\log k!}<\frac{\log k}{\left(\frac{k}{2}-1\right)(\log k-\log 2)} = \frac{1}{\left(\frac{k}{2}-1\right)\left(1-\frac{\log 2}{\log k}\right)}$$

逆数をとっているため、不等号の向きが変わることに注意。上記で $k \longrightarrow +\infty$ を考えると、挟み撃ちの原理により、$\frac{\log k}{\log k!}$ は 0 となる。よって、

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\log{(k-1)!}}{\log k!} = 1$$

したがって、挟み撃ちの原理により、

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\int_1^k \log t dt}{\log k!} = 1$$

が得られた。この式で、

$$\int_1^k \log t dt \sim \log k!$$

を定義する。上記の式を使い、$\log x!$ の微分が可能となる。

2.4　1 回・2 回の微分

上記の $\int_1^k \log t dt \sim \log k!$ を使って、式を変形し x で微分していく。

$$\begin{aligned}\log W(x) &= \log n! - \log x! - \log{(n-x)!} + x\log p + (n-x)\log{(1-p)} \\ &\sim \log n! - \int_1^x \log t dt - \int_1^{n-x} \log t dt + x\log p + (n-x)\log{(1-p)}\end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ だから、

$$\begin{aligned}\{\log W(x)\}' &\sim -\log x + \log{(n-x)} + \log p - \log{(1-p)} \\ &\sim \log\frac{(n-x)p}{x(1-p)}\end{aligned}$$

となる。
微分は傾きを表すから、0 のときにこの場合は最大値となる。

$$\begin{aligned}\log\frac{(n-x)p}{x(1-p)} &= 0 \\ \frac{(n-x)p}{x(1-p)} &= 1 \\ x &= np\end{aligned}$$

最大値、つまりグラフの山の頂点が平均値であることがわかる。
さらに、2 回微分をしていく。$\mu = np$ と、$\sigma^2 = np(1-p)$ を使う (3.3, 3.4, 3.5 を参照)。

$$\begin{aligned}\{\log W(x)\}'' &\sim -\frac{1}{x} - \frac{1}{n-x} \\ &\sim -\frac{1}{np} - \frac{1}{n-np} \\ &\sim -\frac{1}{np(1-p)} \\ &\sim -\frac{1}{\sigma^2}\end{aligned}$$

2.5 テイラー展開

1 回・2 回の微分が出れば、テイラー展開 (4.1 を参照) で代入していけばよい。

$$\log W(x) = \log n! - \log x! - \log(n-x)! + x\log p + (n-x)\log(1-p)$$

上記を $x = \mu$ の周辺で、テイラー展開する。4 項以降は 0 に限りなく近いため無視する。1 回・2 回の微分を代入する。1 回微分は平均値で最大値であるから、微分したものに $x = \mu$ を代入して 0 となる。

$$\begin{aligned}
\log W(x) &\sim \log W(\mu) + \{\log W(\mu)\}'(x-\mu) + \frac{\{\log W(\mu)\}''}{2!}(x-\mu)^2 \\
&\sim \log W(\mu) + \frac{-\frac{1}{\sigma^2}}{2!}(x-\mu)^2 \\
&\sim \log W(\mu) + \frac{-\frac{1}{\sigma^2}}{2!}(x-\mu)^2 \log_e e \\
&\sim \log W(\mu) + \log_e e^{\frac{-\frac{1}{\sigma^2}}{2!}(x-\mu)^2} \\
W(x) &\sim W(\mu) \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}
\end{aligned}$$

確率密度関数の定積分は、1 だから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\mu) \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = 1$$

と考え、まず左辺を計算する。
ところで、

$$\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 = X^2$$

とおいて、変形すると、

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}(x-\mu)$$

となる。上記を x で微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \\
dx &= \sqrt{2}\sigma\, dX
\end{aligned}$$

と変形できる。あくまで計算のために形式的に dx をとらえている。これを代入すると、

$$W(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2}\sqrt{2}\sigma\, dX = \sqrt{2}\sigma W(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} dX$$

となる。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} dX$$

とおくと、

$$W(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2}\sqrt{2}\sigma\, dX = \sqrt{2}\sigma W(\mu) I$$

2.6 重積分と極座標への変換

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} dX$$

この部分のみを考える。

X を x に置き換え、

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ I &= 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ \frac{I}{2} &= \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

と変形する。さらに両辺を 2 乗する。計算しやすいように片方の x を y に変える (4.2, 4.3 を参照)。

$$\begin{aligned} \frac{I^2}{4} &= \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \end{aligned}$$

ここで極座標への変換を行う (4.4 を参照)。このとき、r と θ の範囲は x も y も 0 から ∞ に収まるように $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を基に考える。r は常にプラスだから、θ が $\frac{\pi}{2}$ より大きくなると、$\cos\theta$ がマイナスになってしまう。また、$x^2 + y^2$ は $(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$ となる。

$$\frac{I^2}{4} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r\ drd\theta$$

まずは内側の r で定積分を行う。

$$\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r\,dr$$

ところで、$r^2 = u$ とおいて、u を r で微分すると、

$$\frac{du}{dr} = 2r$$
$$\frac{du}{2} = r\,dr$$

となる。あくまで計算のために形式的に dr をとらえている。上記を代入すると、

$$\begin{aligned}
\int_{r=0}^{\infty} e^{-u}\frac{1}{2}du &= \frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{e^{\infty}} - (-\frac{1}{e^0})\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{0 - (-1)\right\} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$ を入れて、外側の θ で定積分する。

$$\begin{aligned}
\frac{I^2}{4} &= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} \\
I &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

これで I が分かった。確率密度関数の定積分は 1 だから (2.5 を参照)、

$$\sqrt{2}\sigma W(\mu) I = 1$$

$I = \sqrt{\pi}$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}\sigma W(\mu)\sqrt{\pi} &= 1 \\
W(\mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}
\end{aligned}
$$

これで $W(\mu)$ が分かった。

$$W(x) \sim W(\mu) \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$W(\mu)$ を上記 (2.5 を参照) に代入すると、

$$W(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

となって、これで完成である。

3　高校レベルの前提知識

3.1　$E(X) = \mu$ について

前提となる高校レベルの知識について説明しておく。

$E(X)$ は期待値、μ は平均値を表している。

例えば、10 本のくじがあり、3000 円 1 本、500 円 2 本、100 円 7 本が当たるとする。このときの期待値は、

$$E(X) = 3000 \times \frac{1}{10} + 500 \times \frac{2}{10} + 100 \times \frac{7}{10} = 470$$

となる。すなわち 470 円である。

平均値は、

$$\mu = \frac{3000 \times 1 + 500 \times 2 + 100 \times 7}{10} = 470$$

となり、同じことである。

期待値とは 1 回くじを引いたときに戻ってくる見込みの値である。または、無限回このくじを引いたときに（引いたくじを戻すことにする）もらえる金額の平均値と言ってもよい。

すなわち、

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

x_i は、確率変数であり、3000 円、500 円、100 円を指す。

また、p_i はそれぞれの出現する確率であるから、

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

となる。

3.2 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ の証明

分散 $V(X)$ は、

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2$$

である。つまり、それぞれの値と平均値との差の 2 乗を平均化する。

これを変形していく。

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} (p_i x_i^2 - 2p_i x_i \mu + p_i \mu^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2p_i x_i \mu + \sum_{i=1}^{n} p_i \mu^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \mu$（平均値）であり、また p_i はそれぞれの確率だから、$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ となる。

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \mu^2 \end{aligned}$$

したがって、

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

となる。

3.3　$E(X) = \mu = np$ の証明 1

赤い玉 1 つ、白い球 2 つが入っている、外から見えない袋がある。この袋から中を見ずに 1 つ選ぶことにしよう。その選んだ玉は玉の色を確認したら、すぐに袋に戻す。この動作を 3 回繰り返す。このとき、平均してどのくらい赤い玉が出現するだろうか。

期待値だから、赤い玉が 0〜3 回出現する確率を出して（二項分布）、それぞれに出現する回数をかけて足せばよい。

$$\begin{aligned} E(X) = 0 \times {}_3C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-0} + 1 \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} \\ + 2 \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} + 3 \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-3} \end{aligned}$$

これを一般化すると次のようになる。さらに変形していく。

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{n} x \, {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{x \, n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^{n} \frac{x \, n!}{x(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

ところで、$(-1)!$ は定義されないから、始まりは $x = 0$ ではなく $x = 1$ と変わることに注意。また、もともと $x = 0$ の項は 0 となるのだから、$x = 0$ でも $x = 1$ でも同じこと。

$x - 1 = a$ とおくと、

$$E(X) = np \sum_{a=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{a!(n-1-a)!} p^a (1-p)^{n-1-a}$$

となる。さらに $n - 1 = n$、$a = x$ と置きかえれば、

$$E(X) = np \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

ところで、np 以外の部分は二項定理であり、かつ $p + q = 1$(p と q は二項分布の確率) だから、

$$\begin{aligned} (p+q)^n &= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ 1 &= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} E(X) &= np \cdot 1 \\ &= np \end{aligned}$$

となる。

$\sum$ に関わる文字の置き換えが分かりにくければ、具体的な数値を入れてみればよい。例えば、$n = 3$、$p = \frac{1}{3}$ で式を作ると、以下になる。n が $n-1$ に変わるのが分かるだろう。

$$E(X) = 0 \times {}_3C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-0} + 1 \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2 \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} + 3 \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-3} \\
&= 1 \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} + 2 \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} + 3 \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-3} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} + \frac{2}{3} \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} + \frac{3}{3} \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-3} \right\} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{3} \left\{ 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \right\} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{3} \left\{ {}_2C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{2-0} + {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{2-1} + {}_2C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{2-2} \right\} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{3} \sum_{x=0}^{2} {}_2C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 \\
&= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1
\end{aligned}
$$

3.4 $E(X) = \mu = np$ の証明 2

次に微分を使う別の証明方法も挙げておく、実はこちらの方が簡単である。
二項定理である、

$$(px + q)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r p^r q^{n-r} x^r$$

から始める。
両辺を x で微分すると、

$$np(px + q)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r p^r q^{n-r} r x^{r-1}$$

ここで両辺に $x = 1$ を代入すると、

$$np(p + q)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r \, {}_nC_r p^r q^{n-r}$$

となる。二項分布は $p+q=1$ で左辺は np となり、右辺は r が確率 p の項の出現する回数と考えれば、期待値の数式になっている。

よって、

$$E(X)=\mu=np$$

3.5 $V(X)=\sigma^2=npq$ の証明

続いて、$V(X)=\sigma^2=npq$ の証明。正規分布への式変形で必要となる。

$E(X)=\mu=np$ の証明 2 と同じように微分を使う。こちらは 2 回の微分を行う。

二項定理である、

$$(px+q)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r p^r q^{n-r} x^r$$

の両辺を x で微分すると、

$$np(px+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r p^r q^{n-r} r x^{r-1}$$

となる。両辺に x を掛ける。

$$npx(px+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r p^r q^{n-r} r x^{r}$$

両辺を再び x で微分する。積の微分法 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ を使う。

$$np\left\{(px+q)^{n-1}+x(n-1)(px+q)^{n-2}p\right\}=\sum_{r=0}^{n}r^2{}_nC_r p^r q^{n-r} x^{r-1}$$

$x=1$ とおき、$p+q=1$(二項分布の確率) だから、

$$np\{1+(n-1)p\}=\sum_{r=0}^{n}r^2{}_nC_r p^r q^{n-r}$$

となる。整理すると、

$$\sum_{r=0}^{n}r^2{}_nC_r p^r q^{n-r}-(np)^2=npq$$

ところで、

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2 {}_nC_r p^r q^{n-r} - (np)^2$$

だから (3.2 を参照)、

$$V(X) = \sigma^2 = npq$$

4　大学レベルの前提知識

4.1　テイラー展開

テイラー展開には様々な証明方法があるようだが、高校レベルでわかるものを取り上げたい。ここでは厳密な証明よりも納得を優先させる。また、わかりやすさのため、まず 0 を周辺とするマクローリン展開の式変形を紹介する。

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$$

上記の式から始める。左辺と右辺が等しいことが理解できればよい。

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)dt \\ &= f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t)dt \end{aligned}$$

と変形して、後はひたすら部分積分を行っていく。$t - x$ を t で微分すると 1 だから、逆に 1 を積分すると $t - x$ にもなるというわけである。

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + [(t-x)f'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt \\ &= f(0) + (x-x)f'(x) - \{(0-x)f'(0)\} - \int_0^x (t-x)f''(t)dt \\ &= f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt \\ &= f(0) + f'(0)x - \left[\frac{1}{2}(t-x)^2 f''(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2 f'''(t)dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2 f'''(t)dt \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 - \int_0^x \frac{1}{6}(t-x)^3 f''''(t)dt
\end{aligned}
$$

右辺は延々と続くが、$f(x)$ が右辺のように書き換えられることが大変重要である。すなわち、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n
\end{aligned}
$$

となる。マクローリン展開は 0 を周辺とするが、テイラー展開は a であるから、式を変形すると、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

となる。

マクローリン展開は 0 を、テイラー展開は a を周辺とする近似式というわけである。

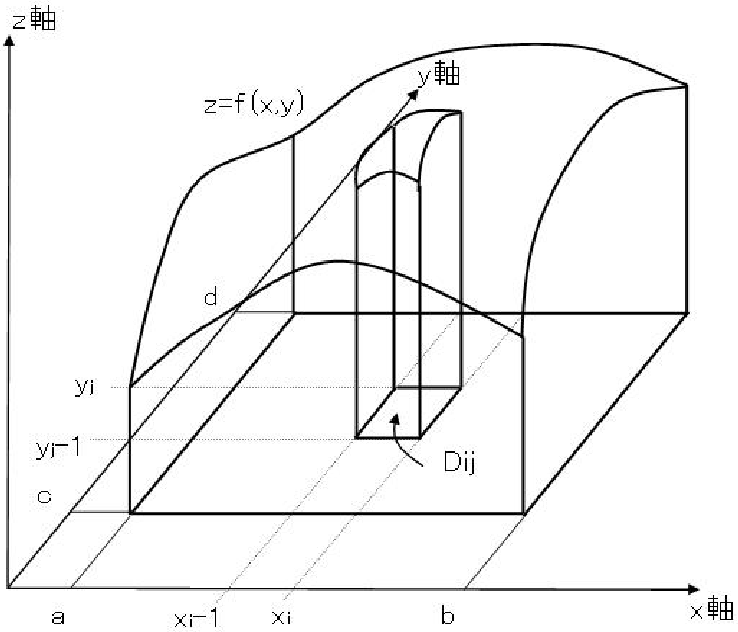
4.2 重積分

ここでは 2 変数関数の微分積分の定義や定理については詳細には取り上げず、直観的なイメージのみを説明したい。

変数が 2 になるということは、グラフは 3 次元空間で立体的になる。例えば変数 x、変数 y によって値 z が決まる。

$$
z = f(x, y)
$$

1 変数では積分の 1 つのイメージは面積であったが、2 変数になるとグラフは 3 次元空間だから体積となる。



上記の D_{ij} と上部の曲面で挟まれた立体の体積を、底面が D_{ij}、高さが $f(s_{ij}, t_{ij})$ の細長い立方体の体積で近似する（ただし、$f(s_{ij}, t_{ij})$ は D_{ij} の点)。

$$f(s_{ij}, t_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

上記を全部の長方形について加えると、

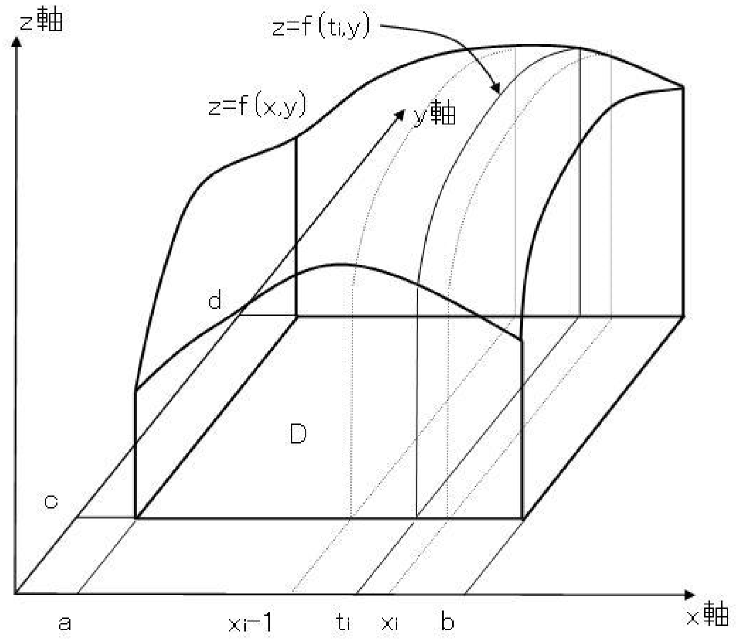
$$R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(s_{ij}, t_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

と表すことができる。これは全体の体積の 1 つの近似であり、もし底面全体 D の分割を限りなく細かくし（$n \longrightarrow \infty, m \longrightarrow \infty$)、$R$ が一定の値に収束するとき、その値を

$$\int\int_D f(x, y)dxdy$$

と表し、$f(x, y)$ の領域 D 上での重積分という。ところが、これでは計算の方法が不明である。実際の計算には累次積分の考え方が必要になる。

4.3 累次積分



上記の図の断面積は、

$$\int_c^d f(t_i, y)dy$$

となり、積分で求めることが可能だ。この値に区間の幅 $(x_i - x_{i-1})$ をかけると、

$$\int_c^d f(t_i, y)dy \times (x_i - x_{i-1})$$

となるが、これは $(x_i - x_{i-1})$ で区切られた体積の 1 つの近似値とみなせる。そして、各区切られた体積を全部加えたものは、

$$\sum_{i=1}^{n} \int_c^d f(t_i, y)dy \times (x_i - x_{i-1})$$

となり、全体の体積 V の 1 つの近似値とみなせる。

x の区間の分割をもっと細かくしていって（$n \longrightarrow \infty$)、極限が存在すれば、

$$V = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)dy \right\} dx$$

と表現できる。

一方、y の区間の分割を行って小さい体積をつくり、それらをすべて加えて体積 V を考えると、

$$V = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy$$

となる。

計算は $\{\}$ の内側を先に定積分すればよい。dy が中に入っていれば、x を定数とみなして y で積分し、その後に $\{\}$ の外側を定積分する。

4.4 重積分と極座標への変換

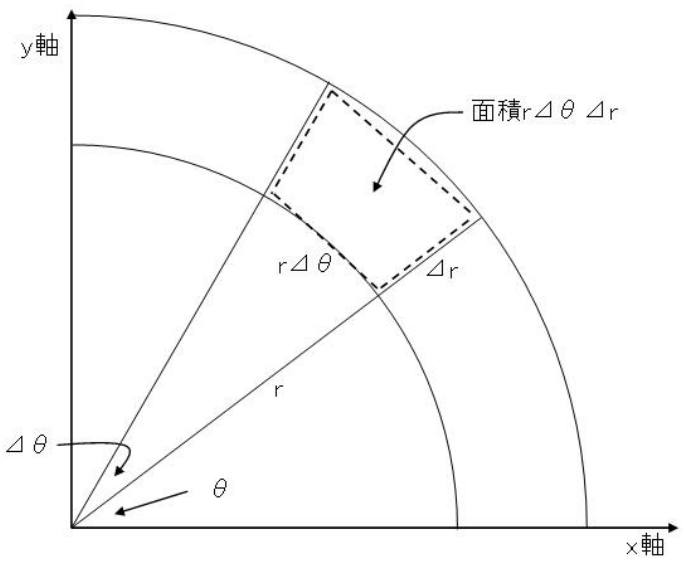
重積分は、

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

と表したが、

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (0 \le r,\ 0 \le \theta < 2\pi)$$

のように、極座標に変換したときにどうなるか考えてみよう。



上記のように、平面極座標では $r=$ 一定の線と $\theta=$ 一定の線が直交しているので、微

小面積を $r\ \mathit{\Delta} r \mathit{\Delta}\theta$ と考える。つまり、$\mathit{\Delta} r$ も $\mathit{\Delta}\theta$ も限りなく 0 に近づくのだから、曲線のある扇形であっても、長方形の面積とみなすというわけだ。

重積分の限りなく小さくした微小面積を $dxdy$ と考えれば、それが $r\ drd\theta$ と書き換えられることになる（ただし、G は xy 平面上の領域)。

$$\int\int_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ drd\theta$$

参考文献

[1] 岩瀬重雄、本部均『高校数学公式活用事典』

[2] 石村園子『やさしく学べる微分積分』

[3] 佐藤敏明『今度こそわかる微分積分 (図解雑学)』

[4] 柴田文明『確率・統計 (理工系の基礎数学 7)』