「18」および「20」への補足

1. はじめに

ここでは，講義の際には省略していた，資本還元および投資乗数の産出方法を補足する。

資本還元も投資乗数も無限幾何級数の応用によって導出されるから, 最初にまず無限幾何級数を説明する。ここでは，わかりやすさを最優先にしたために，必ずしも数学的にエレガントな論証方式を採用していない。

なお，この補足の内容を試験に出すことはない。

2. 幾何級数

2.1 幾何級数

幾何級数：一般に，——

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots ar^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a \cdot r^{i-1} \quad (1)$$

を幾何級数または等比級数と呼ぶ。ここで，a を初項，r を公比，n を項数と呼ぶ。幾何級数の公式によって，——

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (2)$$

である。

【証明】 S_n から $r \cdot S_n$ を引いてみよう。(1) で見たように，——

Memo

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots ar^{n-1}$$

である。また，これに r を掛けると，――

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + \ldots ar^{n-1} + ar^n$$

になる。したがって，S_n から $r \cdot S_n$ を引くということは，――

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \ldots ar^{n-1} \\ r \cdot S_n &= \qquad ar + ar^2 + \ldots ar^{n-1} + ar^n \end{aligned}$$

$$S_n - r \cdot S_n = a \qquad\qquad\qquad - ar^n$$

すなわち，――

$$\begin{aligned} S_n - r \cdot S_n &= a - ar^n \\ S_n(1-r) &= a(1-r^n) \end{aligned}$$

である。それ故に，――

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{【証明終わり】}$$

2.2 無限幾何級数

さて，それではこの幾何級数が無限に進む（$n \to \infty$）としたら，上式はどういうことになるのか。

$$\begin{aligned} S_{n\to\infty} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r} \bullet \lim_{n\to\infty}(1-r^n) \\ &= \frac{a}{1-r} \bullet \left[1 - \lim_{n\to\infty}(r^n)\right] \end{aligned}$$

ここで，公比 r の絶対値 $|r|$ の大きさが，――

1. もし $|r|>1$ ならば，上式は収束しない。
2. もし $|r|<1$ ならば，$n \to \infty$ に応じて，$r^n \to 0$ になる。すなわち，$\lim_{n\to\infty}(r^n)$ は 0 に収束する。それゆえに，もし $|r|<1$ ならば，

$$S_{n\to\infty} = \frac{a}{1-r} \tag{3}$$

3. 複利

3.1 複利

年間利子率を i とすると，もし価値 A の元金をこの利子率で貸し付けるならば，一年目の終わりには，元金と利子とを合計して，この資産は，――

$$S_1 = A(1+i)$$

になる。

複利とは，一定額の元金をベースに利子を計算する（＝単利）のではなく，一度利子が付け加えられたらそれが元金に算入されて次の利子計算のベースになるような，そういう金利のことである。今日，通常，利子と言ったら複利を指す。たとえば，今年の年始に銀行に年利率 1%で 100 万円預金したとしよう。この場合，今年の年末にはこの預金は利子が加わって 101 万円（100×1.01）になる。ここで，一銭もおろさないでおけば，来年の元金は 100 万円ではなく，101 万円になる。したがって，来年の年末には 102.01 万円，すなわち，――

$$101 \times 1.01 = (100 \times 1.01) \times 1.01 = 100 \times (1.01)^2$$

になっている。

一般に，複利で計算すると，もし価値 A の元金年間利子率 i で貸し付けるならば，n 年目の終わりには，元金と複利との合計 S_n は，――

$$S_n = A \cdot (1+i)^n \tag{4}$$

になる。

3.2 割引現在価値

利子のコスト化が完成すると，未来のある一定時点

Memo

の一定金額の割引現在価値を計算することができるようになる。

利子のコスト化が完成すると，そもそも現在の一定価値額は，実際に貸し付けられていなくても，自然に未来に利子を生んで増えるべきものになる。だから，年利子率が 1%だとすると,現在の 100 万円は 1 年後には最低でも（企業活動のリスクを負わなくても）101 万円になっていなければならないものになる。企業の立場から見ると，100 万円を投資して企業活動を行って 1 年後に 101 万円しか回収できなかったとしたら，その企業活動は無意味だったということになる。ただそれを貸し付けておくだけで，アームチェアに座ったまま，この資産の価値は 1 年後には 101 万円になっているはずである。これを逆に見ると，1 年後の 101 万円は現時点では 100 万円の価値しかもっていないのだと言える。

一般に，年複利を前提するかぎり，n 年後の R 円の現在の価値 A は，(4) より，——

$$A=\frac{R}{(1+i)^n} \tag{5}$$

である。

3.3 資本還元

今度は,（一回こっきりじゃなく）年度末に定期的に R 円の収入が発生するような資産を想定して，その資産の現在価値を考えてみよう。このような資産の割引現在価値は，各年度末の R の収入の割引現在価値の総和になる。

引き続いて一定の利子率 i を仮定すると，n 年にわたる各年度末の R の収入の現在価値 A は，(5) より，——

$$A=R\left(\frac{1}{1+i}\right)+R\left(\frac{1}{1+i}\right)^2+\cdots+R\left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$
$$=\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]+\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{1+i}\right)+\cdots+\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-1}$$

である。これは初項 $R\left(\frac{1}{1+i}\right)$，公比 $\frac{1}{1+i}$，項数 n の幾何級数を定義する。したがって，幾何級数の公式 (2) より，——

$$A=\frac{\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\cdot\left[1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{1+i}}$$
$$=\frac{\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\cdot\left[1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]}{\frac{i}{1+i}}$$
$$=\frac{R\cdot\left[1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]}{i}$$
$$=\frac{R\cdot\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

すなわち，——

$$A=\frac{R\cdot\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} \tag{6}$$

である。

今度は，R 円の収入が単に定期的に発生するだけではなく，未来永劫にわたって毎年度末に確実に R の大きさの収入をもたらしてくれるような資産 A があると想定してみよう。ここで，$\frac{1}{1+i}<1$ である以上，上式 (4) は収束することになる。したがって，この資産の割引現在価値は，無限幾何級数の公式 (3) より，——

$$A=\frac{R\left(\frac{1}{1+i}\right)}{1-\frac{1}{1+i}}$$
$$=\frac{\frac{R}{1+i}}{\frac{i}{1+i}}$$

すなわち，——

$$A=\frac{R}{i} \tag{7}$$

Memo

になる。こうして，資産 A の割引現在価値を計算することができるわけである。これがどういうことかと言うと，資産 A の所有者は，$\frac{R}{i}$ の貨幣と引き換えならば，現在，今すぐ，喜んでこの資産を手放そうとするということである。

こうして，たとえば毎年 R 円の配当をもたらす（と期待することができる）株式の理論株価や，またたとえば毎年 R 円の地代（＝賃貸料）をもたらす土地の理論地価を計算することが可能になる。このようにして定期的収入から，それをもたらす資産の価値を産出することを資本還元と言う。

4. 投資乗数

4.1 算術例

講義で見たように，限界消費性向（Marginal Propensity to Consume）は，“これから生じる1円の追加的所得に対して，どのくらいを（貯蓄せずに）消費に回すか”を表している。たとえば，1 円の追加的な所得のうち，もし半分（＝0.5円）を消費して残りの半分を貯蓄しようとするならば，限界消費性向は0.5 になる。もし八割を消費に回して残りの二割を貯蓄しようとするならば，限界消費性向は0.8 になる。ここでは，みんなの限界消費性向が0.8 であると仮定しよう。

ここでいま，私が10,000円の投資をした——たとえば，ミシンメーカーから10,000円の新しいミシンを買って，それをシャツ製造工場に導入した——と仮定しよう。

ここで，私が支出した10,000円をミシンメーカーは，従業員に給料として支払ったり，株主に配当として支払ったり，ミシンの原料である歯車のメーカーに歯車代として支払ったりする。歯車代として支払った場合には，今度は歯車メーカーの従業員とか株主とかの手に渡っていくかもしれない。いずれにせよ，私が支出した10,000円は，いつかは誰かの所得になるだろう。ここでは，話を単純にするために，ミシンメーカーが10,000円全額をその従業員（1 名）に給料として支払うと仮定しよう。こうして，10,000円だけ（私の側での）国民総支出が増大し，したがってまた10,000円だけ（ミシンメーカーの従業員の側での）国民総所得が増大する。しかし，話はそれで終わりではない。

限界消費性向が0.8 である以上，ミシンメーカーの従業員は所得として手に入れた10,000 円のうち，8,000円（＝10,000×0.8）を消費支出する（貯蓄せずに）であろう。ここでは，この従業員はデパートで8,000円のオーブントースターを買ったと仮定しよう。ここでもやはり，デパートはオーブントースターの売上高8,000円を，仕入れた商品の代金として支払ったり，株主に配当として支払ったり，従業員の給料として支払ったりすることができる。先ほどと同様に，どう考えても話は同じところに行き着くのだから，8,000円全額をその株主（1 名）に配当として支払うと仮定しよう。

今度は，やはりまた限界消費性向が0.8 である以上，デパートの株主は所得として手に入れた8,000円のうち，6,400円（＝8,000×0.8）を消費支出するであろう。ここでは，酒屋で6,400円のワインを買ったと仮定しよう。

今度は，この酒屋の店主は所得として手に入れた6,400円のうち，5,120円（＝6,400×0.8）を消費支出するであろう。こうして，だんだんと減ってはいくが，国民総支出＝国民総所得の増加，したがってまた *GNP*（国民総生産）の増加が続くだろう。ここまでのステップをまとめると，以下のようになる。——

Memo

1 回目［私］：

$10,000$ 円

2 回目［ミシンメーカーの従業員］：

$10,000 \times 0.8 = 8,000$ 円

3 回目［デパートの株主］：

$8,000 \times 0.8 = (10,000)0.8^2 = 6,400$ 円

4 回目［酒屋の店主］：

$6,400 \times 0.8 = (10,000)0.8^3 = 5,120$ 円

> ここでは，講義内でそうしたように，固定資本形成＝設備投資は GNP の関数ではない（GNP 水準に関わりなく一定である）と仮定している。この仮定はどういうものかと言うと，それは，ミシンメーカー，デパート，酒屋はそれぞれ手に入れた売上高を固定資本形成＝設備投資に使わないということを意味している。言葉を換えて言うと，設備投資は設備投資を誘発しないということである。要するに，設備投資は最初に行われただけで，その後は，GNP が増えていっても，設備投資はもはや行われないというのがこの仮定の含意である。
>
> 実際には，たとえばミシンメーカーは $10,000$ 円の売上高を工場の拡張に使うかもしれない。その場合には，投資が投資を誘発したということになる。その場合にはまた，設備投資は，もはや GNP の水準に関わりなく一定だというのではなく，GNP が増えるのに連れて誘発された（増えた）ということになる。

ここまでの 4 つのステップで，国民総支出，国民総所得，したがってまた国民総生産（GNP）の増加は

$$10,000 + 8,000 + 6,400 + 5,120 = 29,520 \text{ 円}$$

である。この後も，同様なステップが続くのだが，その額はだんだんと減っていくから，最初の $10,000$ 円の投資によって引き起こされた GNP の増加の合計額はある金額に収束していくはずである。

4.2 代数的証明

それでは，GNP の増加の合計額がいくらになるのかを考えるために，以上のプロセスを記号を使って表現しててみよう。限界消費性向を MPC で表そう

> 注意！ MPC というのは $M \times P \times C$ という意味ではない。そうではなく，MPC という三文字で，限界消費性向という 1 つの変数を表しているわけだ。

自明のことだが，――

$$1 > MPC > 0$$

が成立する。

最初の投資支出を R 円と仮定しよう。このステップが n 回続くと，総ての所得のフローは以下のようになる。――

1 回目：R 円
2 回目：$R \cdot MPC$ 円
3 回目：$R \cdot MPC^2$ 円
4 回目：$R \cdot MPC^3$ 円
⋮
n 回目：$R \cdot MPC^{n-1}$ 円

以上のすべてのフローを合計すると，この R 円の投資から生まれたフローの合計額――つまり GNP の増加分（ΔGNP）――が出てくる。すなわち，――

$$\Delta GNP = R + R \cdot MPC + R \cdot MPC^2 + \cdots + R \cdot MPC^{n-1}$$

である。これは初項 R，公比 MPC，項数 n の幾何級数を定義する。ここで，$MPC < 1$ である以上，このステップが無限に続く（$n \to \infty$）と，上式は収束することになる。したがって，R 円の投資から生まれた GNP の増加分は，無限幾何級数の公式 (3) より，――

$$\Delta GNP = \frac{R}{1 - MPC}$$

すなわち，――

$$\Delta GNP = R \cdot \left(\frac{1}{1 - MPC} \right) \tag{8}$$

ここで，$\frac{1}{1 - MPC}$ が投資乗数である。自明のことではあるが，確認しておくと，$1 > MPC > 0$ である以上，$1 > (1 - MPC) > 0$ になり，したがってまた，投資乗数は必ず $\left(\frac{1}{1 - MPC} \right) > 1$ になる。

Memo

投資乗数が意味するのは，以下のとおりである。——もし R 円の追加的な支出があれば，GNP に与えるその効果は，R 円に留まらない。最大で $R\cdot\left(\frac{1}{1-MPC}\right)$ 円——つまり R 円の乗数倍——の GNP の増加を期待することができる。

先ほどの例に戻ってみよう。先ほどの例では，最初の設備投資額（R）が10,000円，限界消費性向（MPC）が0.8であった。したがって，(8) より，乗数は，——

$$\left(\frac{1}{1-0.8}\right)=\frac{1}{0.2}=5$$

である。また，私が行った10,000円の設備投資（ミシンの購入）によって引き起こされた GNP の増加の合計額は，最終的には，——

$$\Delta GNP = 10,000\times 5 = 50,000\text{円}$$

に近付いていくはずである。

4.3 図解

4.3.1 序

以上の議論は，次のようなモデルに基づいている。

取り敢えず政府支出は無視しよう。ここで，消費を C，投資を I で表し，また国民総支出，国民総所得，したがって国民総生産（GNP）を Y で表すことにしよう。

4.3.2 支出から見た GNP

最初に，この Y を支出（国民総支出）という観点から考察しよう。そうすると，支出は，消費支出と投資支出とに分かれる。すなわち，——

$$Y = C + I \tag{9}$$

になる。消費は GNP の関数と見なすことができるから，——

$$C = C(Y) \tag{10}$$

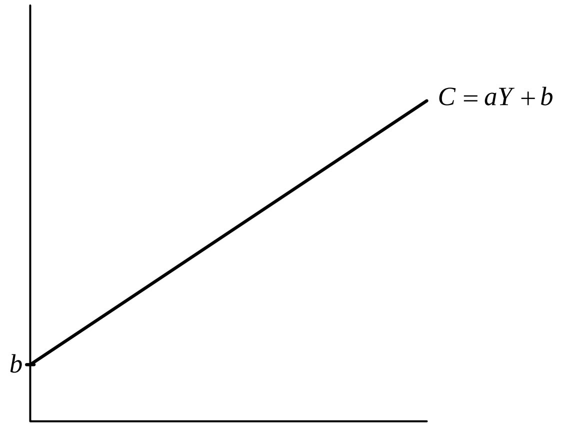
この (10) 式を消費関数と呼ぶ。ここで，限界消費性向は，消費関数の 1 次の導関数である。すなわち，——

$$MPC = C'(Y) > 0$$

この講義でもそうしていたように，非常にしばしば，消費関数は 1 次関数だと仮定されている。すなわち，——

$$C = aY + b \tag{11}$$

自明のことだが，この場合，限界消費性向は a であり，グラフで表現すると，この直線の傾きになる。b は，GNP の大きさに関わりなく最低限しなければならない消費支出（GNP がゼロである場合にもしなければならない消費支出）であり，グラフで表現すると，縦軸の切片になる。GNP がゼロである場合にも，消費をまったくしないわけには行かないのだから，必ず $b>0$ になる。



これにたいして，投資は，少なくとも GNP の大きさ以外の要因によっても影響を受ける。ここでは，この講義でそうしていたように，投資は GNP の大きさに関わりなく一定額 d であると仮定しよう。すなわち，——

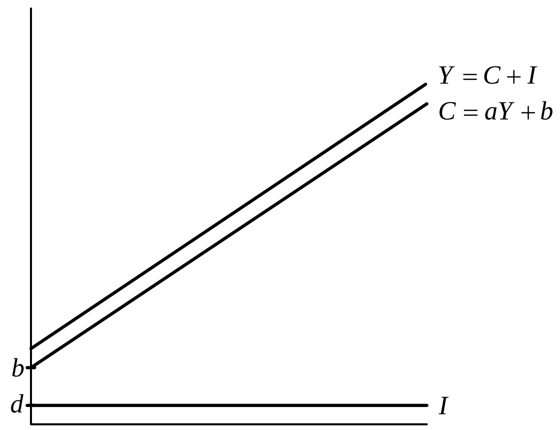
$$I = d \tag{12}$$

したがって，(9) 式，(11) 式，(12) 式から，支出という観点から見ると，Y は，結局のところ，——

$$Y = aY + b + d \tag{13}$$

になる。

Memo



4.3.3 所得から見た GNP

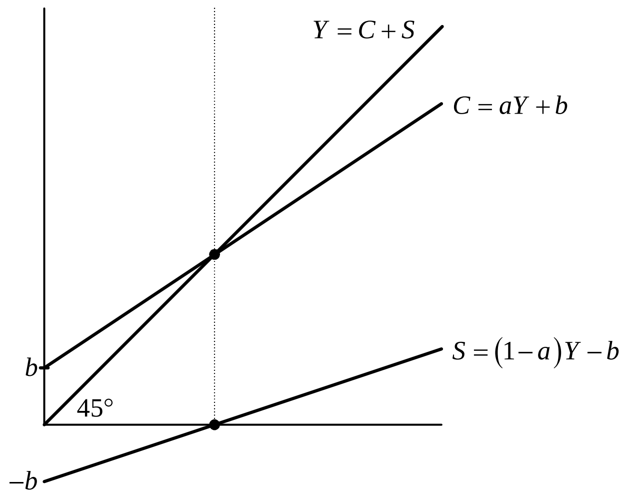
今度は，同じ Y を所得（国民総所得）という観点から考察しよう。所得は消費と貯蓄とに分かれる。すなわち，——

$$Y=C+S \tag{14}$$

定義上，所得の中で消費されない部分は必ず貯蓄されている。したがって，消費が GNP の関数であるならば，貯蓄もまた GNP の関数である。GNP がゼロである時は，消費支出額と貯蓄支出額との合計はゼロにから，また追加的所得の中で消費されない部分は必ず貯蓄されるのだから，この場合には，貯蓄を S で表すと，——

$$S=S(Y)=(1-a)Y-b$$

になる。ここで，$1-a$ を限界貯蓄性向（Marginal Propensity to Save）と呼ぶ。消費関数と貯蓄関数との和は原点を通る傾き 1 の直線（45 度線）を定義する。



すでに見たように，投資乗数は，

$$\frac{1}{1-MPC}$$

であった。今，限界貯蓄性向を MPS で表そう。すると，

$$1-MPC=MPS$$

であるから，結局のところ，乗数は，

$$\frac{1}{MPS}$$

に等しい。すなわち，この例では，乗数は，——

$$\frac{1}{1-a}$$

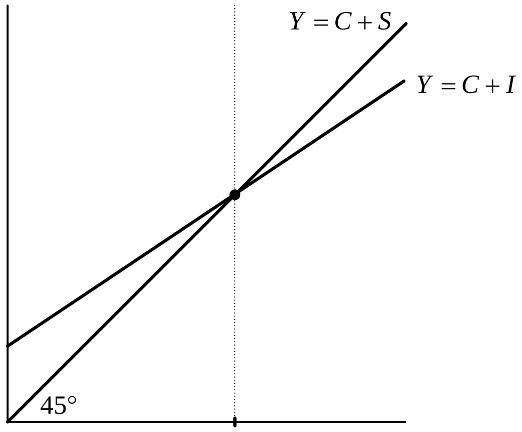
になる。

Y を支出という観点から見ようと所得という観点から見ようと，事後的には，両方の Y は一致しなければならない。すなわち，(9) 式および (14) 式から，——

$$Y=(C+I)=(C+S)$$

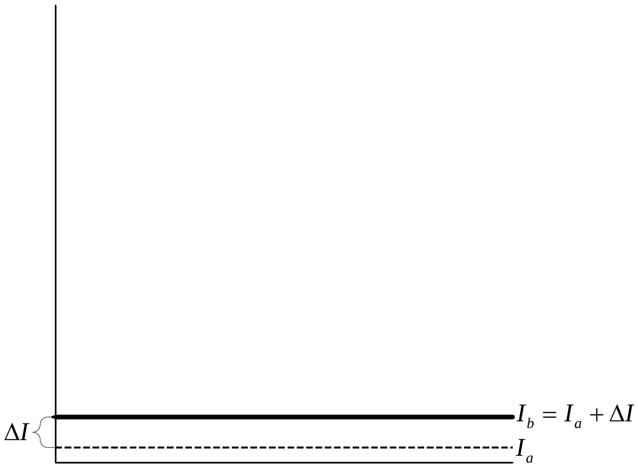
グラフで表すと，支出曲線 $Y=C+I$ と所得曲線 $Y=C+S$ との交点が均衡 GNP を表している。

Memo

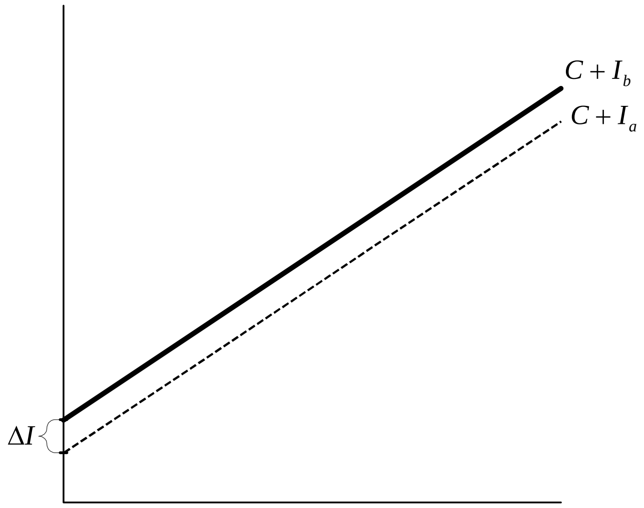


4.3.4 乗数効果

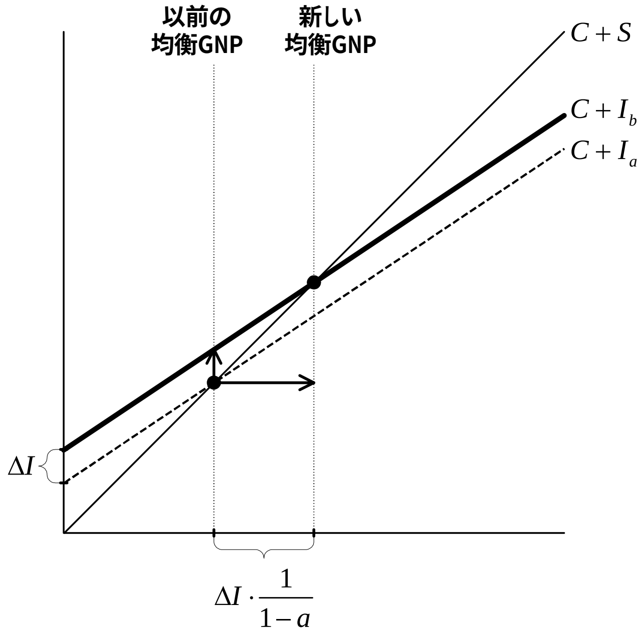
いま，GNP からは独立に追加的な投資 ΔI が生じたと仮定しよう。以前の投資額を I_a，また新しい投資額を I_a としよう。グラフ上では，このことは，投資曲線が ΔI だけ上方にシフトするというように現れる。



I が ΔI だけ上方にシフトしたのだから，$C + I$ もまた同様に ΔI だけ上方にシフトすることになる。



ここで，$C + I$ 曲線と $C + S$ 曲線との交点をグラフ上で見てみると，ΔI だけの投資の増加が，その乗数（$\frac{1}{1-a}$）倍だけの GNP の増加をもたらしていることがわかる（縦方向の矢印の長さと，横方向の矢印の長さとの違いに着目せよ）。



4.4 補足の補足

4.4.1 投資が誘発される場合

上例では消費は GNP の増加関数（$C = C(Y)$ かつ $C'(Y) > 0$）だが，投資は定数であると仮定してきた。

Memo

これにたいして，「4.1 算術例」で述べたように，GNP が増大するのにつれて（たとえば売上高が伸びると），企業も投資を増やそうとするかもしれない。その場合には，投資が投資を誘発し，追加的投資の効果（つまり乗数効果）が高まることになる。この場合には，消費だけではなく投資もまた GNP の増加関数（$I = I(Y)$ かつ $I'(Y) > 0$）だということになる。

この場合の乗数は以下のようになる。

$$\frac{1}{1-\left(C'(Y)+I'(Y)\right)}$$

引き続いて，限界消費性向が a であると仮定しよう。たとえば, もし消費関数と同様に投資も GNP の線型の増加関数であり，投資関数が，――

$$I = I(Y) = cY + d$$

であるならば，乗数は，――

$$\frac{1}{1-(a+c)}$$

になる。すでに見たように，投資関数が定数 d である場合には，乗数は，――

$$\frac{1}{1-a}$$

になる。自明のことだが，$c > 0$ である以上，――

$$\frac{1}{1-(a+c)} > \frac{1}{1-a}$$

になる。すなわち，同じ ΔI 円の追加投資額であっても，投資が定数である場合よりも，GNP の増加関数である場合の方が乗数効果が高まることになる。

4.4.2 **消費関数の増加が逓減する場合**

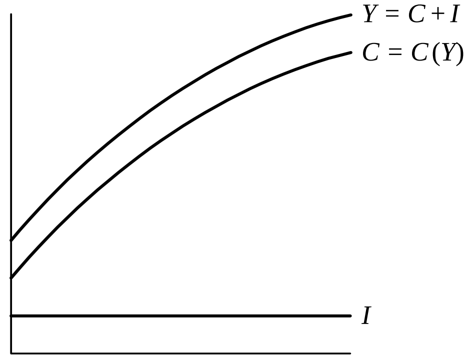
自明のことだが，線型性（1 次関数）を仮定する限り，消費関数の 2 次の導関数は 0 になる。すなわち，――

$$C''(Y) = 0$$

教科書などでは，この 2 次導関数が負数になるという前提でグラフが描かれる場合もある。すなわち，――

$$C''(Y) < 0$$

これはどういうことかと言うと，個人所得の例で考えてみると，貧乏な頃は，手に入った追加的所得を貯蓄している余裕なんてないが，金持ちになったら追加的所得のかなりの部分を貯蓄に回すこともできるだろう。このことが国民総所得の場合にもあてはまると仮定して，そのようなグラフを描いているわけである。



この場合には，国民総所得，したがって国民総生産（GNP）が増大するのにつれて，乗数効果は小さくなっていくことになる。

Memo