物理演習問題（4）　１９９９年5月１０日

[1]　２次元直交座標系（デカルト座標系）において以下で表される位置ベクトルを極座標で表せ。
(1) $\boldsymbol{r} = (2, 2)$、　(2) $\boldsymbol{r} = (-3, -\sqrt{3})$、　(3) $\boldsymbol{r} = (-\sqrt{3}, 1)$

[2]　あるベクトル $\boldsymbol{A}$ は、２次元極座標系において、r 成分が A_r であり、θ 成分が A_θ であるという。ベクトル $\boldsymbol{A}$ を極座標系の基底ベクトルを用いて書き表せ。

[3]
(1) 位置ベクトルのデカルト座標成分 x、y を、極座標の変数、r 及び θ を用いて書け。
(2) (1) を時間で微分することにより、速度ベクトル、加速度ベクトルの、デカルト座標成分を 極座標の変数 で表せ。
(3) 一般に、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の極座標成分 A_r、A_θ は、デカルト座標成分 A_x、A_y と

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \end{bmatrix}$$

と関係づけられる。このことと (2) を利用し、速度ベクトル、加速度ベクトルの極座標成分 を導け。

[4]　２次元直交直線座標系での基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ と、２次元極座標系における基底ベクトル $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ との間には

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{bmatrix}$$

の関係がある。このとき、

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\boldsymbol{e}_r$$

となることを示せ。

[5]　極座標における位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

と書ける。このことを利用し、以下の問いに答えよ。
(1) 位置ベクトルの極座標成分 ― r 成分、θ 成分 ― を書け。
(2) 問題 [**4**] の結果を利用して、速度ベクトル、加速度ベクトルを極座標系の基底ベクトルを用いて書き表せ。
(3) (2) の特別な場合として、等速円運動の速度ベクトル、加速度ベクトルを書き表し、それぞれの向きについて述べよ。