

[1] 中心力 $F(r) = -kr^n$ のうち、すべての束縛された物体が閉じた軌道を描く中心力は $n = -2$ と $n = 1$ のときだけである (Bertrand の定理。なお、円軌道からわずかにそれた軌道を考えるのみなら、もう少し条件はゆるくなる)。前者は万有引力やクーロン力を表し、後者は 3 次元調和振動子を表す (演習問題 (2 1) で見たように、球状銀河の内部での恒星に働く万有引力や、地球内部にある物体への万有引力もこの形になる)。

(1) $n = -2$ の場合 (万有引力としてよい) に運動方程式を書き、ケプラーの 3 法則を導け。

(2) $n = 1$ のとき、ケプラーの法則と同様な法則が成り立つか？ 演習問題 (1 0)

[4] を参考に考察せよ。

[2] 換算質量を用いたとき、ケプラーの法則はそのまま厳密に成立するだろうか？ 太陽の回りをまわる惑星の場合、原子核のまわりを回る電子の場合、それぞれについて考察せよ。

[3] 太陽 (質量 M) のまわりの惑星 (質量 m) の運動を考える。

(1) 2 次元極座標を用いて各成分の運動方程式を書け。

(2) θ 成分の方程式から、面積速度が定数となることを示せ。

(3) (2) を利用し、(1) における r 成分の方程式を 変数 r だけの方程式にした後、両辺に $\dot{r}$ を掛け時間で積分することにより、力学的エネルギー保存則

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}) - G\frac{mM}{r} = E$$

を導け。ただし、 $h/2$ は面積速度であるとする。

(4) 上の式で第 2、第 3 項の和をポテンシャル関数 $U(r)$ とみなし、これを r の関数として図示せよ。また、極小値を与える $r = r_0$ と、極小値 $V(r = r_0)$ を求めよ。

(5) 円軌道を描く惑星のエネルギーを面積速度 $h/2$ の関数として求めよ。この運動を、(4) の図に書き込め。

(6) 一般に太陽の回りを運動する天体 (惑星程度の質量) の描く軌道を、天体の力学的エネルギー E と、面積速度 $h/2$ を用いて表せ。

(7) 惑星が楕円軌道を描いて運動している場合、軌道の長半径と短半径を、エネルギー E と面積速度 $h/2$ を用いて表せ。この結果から、ある固定したエネルギーに対し、異なる角運動量を持った惑星の運動の軌道を図示せよ。(円運動とその他 2 つの軌道を書け)