物理演習問題（２２） －１９９９年１２月２０日－ 千年紀最後の大演習問題

今回の記念すべき物理大演習問題は、古代ギリシャは、アテネの学堂からの出題。
[1] 古代ギリシャのアポロニウスは、著作「円錐曲線論」の中で、「２定点からの距離の和が一定の曲線は楕円であり、差が一定の曲線は双曲線である。」と述べている。過去のこの偉大なる賢者にならい、諸君もこれらの曲線の方程式を導出してみよう。
(1) ２つの点 F、F' の中点に原点をとり、それぞれの点までの原点からの距離を c とする。アポロニウスによれば、このとき２次元平面上の２点 F、F' からの距離 r、r' の和が

$$r + r' = 2a \quad a = const.$$

と書けるような点 (x, y) の集合は楕円曲線を表している。このことを、上記の条件式が楕円の方程式の標準形

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad where\ b^2 = a^2 - c^2$$

と等価であることを確かめることにより示せ。
(2) 双曲線の場合、２点の差が

$$r' - r = 2a \quad a = const.$$

のように表されるというのが大賢者アポロニウスの主張である。この条件を満たす点が以下の双曲線の標準形の方程式に従うことを示せ。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad where\ b^2 = c^2 - a^2$$

(3) 図のように極座標をとれば、楕円及び双曲線が

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos\theta}$$

に従うことを示せ。ただし、$\epsilon < 1$ では楕円、$\epsilon > 1$ では双曲線を表す。
(4) 円及び放物線の場合、ϵ に対しどのような条件を課せばよいか論ぜよ。

[2]
(1) 角運動量の x、y、z 成分をそれぞれ書け。
(2) 角運動量の z 成分を極座標を用いて表せ。
(3) 中心力のもとで運動している物体の角運動量は保存することを示せ。
(4) 中心力のもとで運動している物体は必ず２次元平面上を運動することを示せ。
(5) 中心力のもとで運動している物体の面積速度は一定であることを示せ。

[3]
(1) 質量 m の物体が等速直線運動をしている。このとき、座標原点の回りの物体の角運動量が変化しないことを示せ。
(2) 質量 m の物体が、半径 r の円周上を角速度 ω で等速円運動している。このとき物体が回転の中心に対して持つ角運動量を求めよ。
(3) 地球が太陽をまわり軌道を円とし、その半径を 1.5×10^8[km] とすれば、地球が太陽をまわる面積速度及び角運動量はいくらか。

[4]　質量 M のおもりが糸に結ばれ、水平面内で動くように束縛されている。糸の長さが R_0 のとき、物体は角速度 ω_0 で等速円運動しているとし、これを図のように糸を静かに中心方向に引いて、円運動の半径を $R < R_0$ に変える。
(1) 運動エネルギーの変化を求めよ。
(2) 張力 T を半径 r（$R < r < R_0$）の関数として求めよ。
(3) 糸を引いた事による仕事を求め、(1) の結果と比較し、わかったことを書け。

[5]　単振り子の角度方向の運動方程式を以下の角運動量に対する方程式から導出せよ。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

[6]
(1) 中心力のもとで、物体が円軌道上を運動しているとき、この運動は必ず<u>等速円運動</u>であることを示せ。
(2) 質量 M の物体からの万有引力の作用のもとで半径 r の等速円運動している質量 m の物体について運動方程式をたてよ。
(3) このときの、角速度と、速さを、半径 r の関数として求めよ。
(4) 角運動量 L が与えられたときの、この等速円運動の半径 r 及び物体の速さ v を、L、万有引力定数 G、M、m を用いて表せ。
(5) 万有引力の作用のもとで等速円運動している物体の力学的エネルギー（運動エネルギー＋位置エネルギー）を物体の角運動量の大きさ L を用いて表せ。
(6) 物体が万有引力のもとで等速円運動をしている場合に、ケプラーの第３法則を導け。
(7) (6) のときの面積速度を求めよ。

[7]　電子（質量 9.10×10^{-31}[kg]）が陽子を中心とする半径 $0.529\mathring{A} = 0.529 \times 10^{-10}$[m] の円周上を運動している。
(1) 陽子のまわりの電子の角運動量 L を文字式及び数値で求めよ。
(2) 全力学的エネルギーはいくらか。まず角運動量 L を用いて文字式で表し、(1) の結果を利用し、([J] および、[eV] の単位により）数値で答えよ。
(3) ヘリウム原子核（電荷は $+2e$）の回りをこれと同じ角運動量で回る電子があるとすると、その軌道半径とエネルギー（[J] 及び [eV] の単位で答えよ）はどれだけか。
(4) 水素原子、ヘリウム原子それぞれにおいて、上で考えた電子を電離させるために必要なエネルギーを求めよ。[J] 及び [eV] の単位で答えよ。

なお、1[eV](１電子ボルト) は、電気素量 $e = 1.602 \times 10^{-19}$[C] を持つ粒子が、真空中において、１ボルトの電位差をもつ２点間で加速されるときに得るエネルギーであり、$1[\mathrm{eV}] = 1.602 \times 10^{-19}[\mathrm{J}]$ である。また２つの電荷 q、Q の間に働くクーロン力は

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^3}\boldsymbol{r}$$

で与えられ、積 qQ が正ならば斥力を、負ならば引力を与える。ここで、$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}[\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]$ は真空の誘電率とよばれる量である。

（コメント）
[6] の (5) で、これをたとえば水素原子の問題に置き換える。すなわち、万有引力をクーロン力で置き換えると、陽子のまわりを回る電子の全力学的エネルギーが電子の角運動量と他の定数のみ（半径や速さを含まない形）で書けたことになる。（**[7]** の (2) に相当）量子論では、ここで、角運動量 L が量子化される

$$L = n\hbar\,(n \text{ は自然数})$$

ことにより、エネルギーがとびとびの値をとり、たとえば $n = 1$ のときには、水素原子の基底状態のエネルギー（$-13.6[eV]$）を与える。（これは同時に電子軌道がとびとびの半径しかとれないことと、$n = 1$ の場合にはその最小半径を与えることを意味する。）

この問題は、厳密には換算質量を用いなければならない。水素原子のときには、陽子の質量が電子の約２０００倍もあるため、換算質量を用いなくてもあまり影響はないが（ほとんど電子の質量に等しい）、これが陽電子（電子と同じ質量を持ち、陽子と同じ電荷を持つ）の回りを回る電子からなる系（ポジトロニウムという）では、影響が大きく（換算質量は電子の質量の半分になる）、基底状態のエネルギーは、$-6.8[eV]$（水素原子の半分）になる。

… では … 楽しいクリスマスとよいお正月を ‥ (N.Suzuki)