物理演習問題（１３） １９９９年7月１２日

[1] 「単振動の方程式ー複素数を使わない方法」
単振動の方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

を解きたい。

(1) 微分方程式の両辺に $\dot{x}$ をかけ、t で積分すると

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = C^2$$

となることを示せ（ヒント：x^2 および $\dot{x}^2$ を t で微分してみよ)。なお右辺の C は任意定数であり、左辺が正であることを C^2 と書く事により表現している。

(2) (1) の微分方程式は変数分離形になっている。実際

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega\ dt$$

と書き換えられることを示せ。なおここで、$C^2 = \omega^2 A^2$ のように、C を別の任意定数 A で置き換えた。

(3) 左辺の積分を $x = A\sin\theta$ と変数を置き換える事により行い、微分方程式の解が

$$\theta = \omega t + \alpha$$

となる事を示せ。なお α は任意定数である。

(4) このことから解が

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

となることを示せ。

[補足] この解法はエネルギー積分の方法と呼ばれ、後期に力学的エネルギーの保存法則の議論をするときに再び登場する。

[2] 「減衰振動の方程式ー複素数を使わない方法」
ばねに結ばれた質量 m の質点が、ばねから受ける質点の変位に比例した力の他に、速度に比例した抵抗をも受けながら振動するときの質点の運動を調べたい。一次元の運動のみ考察するとすれば、運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

と書く事ができる。

(1) $\omega = 0$ として方程式を見直すと、速度に比例した大きさの抵抗力が働く場合の運動方程式になっていることがわかる。このとき $x(t) = \mathrm{e}^{-2\gamma t}$ が解になっていることを方程式に代入することによって確かめる。

(2) 問題としている方程式は、(1) にさらに振動を引き起こすと思われる、変位に比例した力の項が付け加わっている。そこで、求める解は減衰のほかになんらかの時間変化があると予想し、試みに解を $x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}y(t)$ とおき（λ は定数とする。)、$y(t)$ に関する方程式を求める。

(3) (2) で求めた方程式の $\dot{y}$ の係数を 0 とおけるとしたときの定数 λ に対する条件を求める。（方程式を簡単化するのがねらいである。）

(4) (3) の条件のもとでの $y(t)$ に関する微分方程式を解こう。この方程式には、$\ddot{y}$ と y の項があるが、y の係数を (i) 正とする (ii) 負とする (iii) 0 とする の 3 通りに場合分けをし、それぞれの場合につき、一般解 $y(t)$ を求める。

(5) (3) の条件および (4) で求めた $y(t)$ の解を (2) の変数の置き換えの式に代入することによって、$x(t)$ に関する一般解を求める。