

[1] 関数 $f(x)$ の変数 x による導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義される。

これを利用して、以下の関数の導関数をもとめよ。

$$(1) f(x) = \sqrt{x}, \quad (2) f(x) = \sin x, \quad (3) f(x) = \ln x (= \log_e x)$$

なお、

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

と、三角関数の公式を使ってよい。

[2]

(1) $(x^2 + 1)^4$ を x について微分せよ。 (2) $y^2 e^y$ を y について微分せよ。

(3) $\sin^3(\alpha u + \beta)$ を u について微分せよ。

(ただし、 α, β は定数とする。)

[3] 指数関数 e^t は無限級数

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

で定義される。 a を定数として

$$\frac{d}{dt} e^{at} = a e^{at}$$

を示せ。

これを用いて、

$$\int_{t_0}^t e^{at'} dt' = \frac{1}{a} (e^{at} - e^{at_0})$$

を示せ。

[4] 以下の積分を求めよ。

$$(1) \int_{t_0}^t \sin at' dt', \quad (2) \int_{t_0}^t \cos at' dt'$$

[5] 以下の問いに答えよ。

(1) 物体の速度が時間の関数として、 $v(t) = \alpha t^2 [\text{m/s}]$ で与えられているとき、時刻 $t = 0 [\text{s}]$ から $t = 2 [\text{s}]$ までに進む距離を求めよ。

(2) 物体の位置が時間の関数として、 $x(t) = 5 \sin(3\pi t + \pi/3) [\text{m}]$ で与えられているとき時刻 $t = 2 [\text{s}]$ における物体の速度を求めよ。

(3) 物体が時刻 $t = 0$ に原点 $x(t = 0) = 0$ を出発し、速度が時間の関数として $v(t) = t \sin(t) [\text{m/s}]$ で与えられるような運動をしている。このとき時刻 $t_1 = \pi/2 [\text{s}]$ に物体はどの位置に到達しているか。また、時刻 $t_2 = \pi [\text{s}]$ 及び $t_3 = 2\pi [\text{s}]$ のときはどうか。