物理演習　夏休みの宿題問題　　提出日 ９月２１日

[まえおき]

夏休みの宿題は、前期の復習および時間の少なさのため説明しきれなかった重要な事項について問題を解く形で勉強してもらうよう作成しました。

一見して分量が多く見えますが、これはなるべく独力でできるように問題の解き方を細かく説明したためです。したがって、実際に取り組んでみれば思ったより難しくはないでしょう。

なお、ここでの問題は、諸君のさまざまな質問に答えるためのものも多く含まれています。特に永海君、真野君、屋敷君、吉川君、吉村君、渡辺君の多くの意義のある鋭い質問は講義をする上でも日ごろの演習問題を作る上でも大変役に立っています。また、藤田君、宮下君にはこの夏休みの宿題のモニターをひきうけてもらいました。この場でこの８名に感謝をしておきます。他の学生諸君もこの８人に負けずにがんばってください。

[**1**]　（演習問題（５）[**1**] の続き。）

(5)-[**1**] の結果を利用し、今度は雨について考えたい。雨も落下中空気抵抗を受け、落下速度が一定になると考えられる。ここでは雨滴が (5)-[**1**] のように球状であると仮定しよう。

(1) 雨滴の密度を ρ とし、(5)-[**1**]　の (4) で求めた終端速度を m のかわりに ρ を用いてあらわせ。

(2) (1) の結果から、大きさの異なる２つの雨滴の落下速度についてなにが言えるか?

(3) 重力加速度を $g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$、空気の粘性係数を 1.8×10^{-5} $[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot s^{-1}]$、雨滴の密度を 1×10^3 $[\mathrm{kg/m^3}]$ とすると、半径 $2 \times 10^{-3}[\mathrm{m}]$ の雨滴は地表にどのくらいの速さで落ちてくるか？（終端速度に達しているとせよ。）

[**2**]　雨の落下速度はだいたい $10[\mathrm{m/s}]$ 程度であり、[1] の (3) の結果はこれと大きく隔たっているはずである。このことは雨の落下速度を説明するためには速さに比例する抵抗力を考慮しただけでは不十分であることを示している。

そこで、雨の落下運動に対する空気の抵抗力が、雨の速さ v の２乗に比例して大きくなると仮定する。これは慣性抵抗と呼ばれるものであり、その大きさは

$$\frac{1}{4}\pi\rho_0 a^2 v^2$$

で与えられる。ここで ρ_0 は空気の密度、a は雨滴の半径である。

(1) 空気抵抗が速度の方向と常に反対向きに働くことを表現できるように上の式をベクトルに書き換えよ。

(2) 雨滴の質量を m、重力加速度を $\boldsymbol{g}$ とし、運動方程式をベクトルで書け。

(3) 以下では、鉛直下向きに z 軸をとり、雨の運動は１次元のみとし、他の成分は考えないものとしよう。このとき雨滴の質量を m とすると、雨滴の落下中の運動方程式は

$$m\dot{v}_z = mg - \frac{1}{4}\pi\rho_0 a^2 v_z^2$$

となることを示せ。

(4) 運動方程式において $\dot{v}_z = 0$ とおくことにより終端速度を求めよ。

(5) 空気の密度を $\rho_0 = 1.205[\mathrm{kg/m^3}]$ とし、[1] の (3) と同じ大きさの雨滴を考えるとすれば、雨滴の落下速度は何 [m/s] になるか？

(6) (4) では終端速度のみを求めたが、ここでは任意の時刻において雨滴の速度がいくらであるかを求めてみよう。(3) は非線形の常微分方程式である。通常非線形の微分方程式は解く事が非常に難しいが（または、解析的に解けず数値計算に頼らざるを得ない。）、幸いこの方程式は変数分離形であり、さほど解く事が難しくない。

(3) の運動方程式が

$$\frac{dv}{g - \frac{1}{4m}\pi\rho_0 a^2 v_z^2} = dt$$

となることを示せ。

(7) 左辺の分母を因数分解し、さらに左辺全体を部分分数に分解すると、定数および dv を除き

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\mu}} + \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{g} + v\sqrt{\mu}}$$

となる事を示せ。ただしここで、

$$\mu = \frac{1}{4m}\pi\rho_0 a^2$$

とおいた。

(8) 時刻 $t = 0$ で雨滴の速度がゼロであるとして、運動方程式を解き、解が

$$v = \sqrt{g/\mu}\tanh(\sqrt{\mu g}t)$$

となることを示せ。

(9) $t \to \infty$ の極限をとり、終端速度を求めよ。

なお時間に余裕のある学生は (3) で鉛直上向きに z 軸の正の向きをとったとしたときの運動方程式を書き解いてみよ。その際求める解は v_z が負になるはずである点に気を付けよ。

[3] 演習問題（５）-[1] において、時刻 $t = 0$ での速度が終端速度より速い場合の物体の落下運動について論ぜよ。

[4] 単振動の方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

を解きたい。

(1) 微分方程式の両辺に $\dot{x}$ をかけ、t で積分すると

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = C^2$$

となることを示せ（ヒント：x^2 および $\dot{x}^2$ を t で微分してみよ)。なお右辺の C は任意定数であり、左辺が正であることを C^2 と書く事により表現している。

(2) (1) の微分方程式は変数分離形になっている。実際

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega\ dt$$

と書き換えられることを示せ。なおここで、$C^2 = \omega^2 A^2$ のように、C を別の任意定数 A で置き換えた。

(3) 左辺の積分を $x = A\sin\theta$ と変数を置き換える事により行い、微分方程式の解が

$$\theta = \omega t + \alpha$$

となる事を示せ。なお α は任意定数である。

(4) このことから解が

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

となることを示せ。

[補足] この解法はエネルギー積分の方法と呼ばれ、後期に力学的エネルギーの保存法則の議論をするときに再び登場する。

[5] 長さ l の糸の一端を固定し、他端に質量 m のおもりをつけた単振り子を考える。鉛直下方から角度 θ_A まで糸がたるまないようにおもりを引っ張り静かに手を放すとおもりは振動しはじめる。

(1) 問題に合った図を書き、おもりに働く力をすべて書け。

(2) 極座標を図に書き入れ、運動方程式を動径方向 (r 方向) および、角度方向（θ 方向）に対してたてよ。

(3) θ_A が非常に小さく近似的に $\sin\theta \approx \theta$ としたときの任意の時刻での角度 $\theta(t)$ を求めよ。

(4) 振り子の周期を求め、振り子の等時性について述べよ。

(5) θ_A があまり小さくないときを考える。（かつ、大きすぎないともする。$\theta_A < \frac{\pi}{2}$）このときの $\theta(t)$ の解を前問の方法を利用し解いていこう。

いま考えている方程式は

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \qquad (\omega^2 = \frac{l}{g})$$

である。これに前問同様 $\dot{\theta}$ をかけ、時刻 $t = 0$ から、ある時刻 t まで積分することにより、

$$(\dot{\theta})^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_A)$$

が得られることを示せ。なお初期条件は題意より、$t = 0$ で、$\theta = \theta_A$、$\dot{\theta} = 0$ である。

(6) 上式を三角関数の倍角公式を用いて

$$\dot{\theta} = \pm 2\omega\sqrt{\sin^2\frac{\theta_A}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

と書き換えよ。

(7) 時間の原点をとりなおして、$t = 0$ のとき、振動の最下点におもりがあり、$\dot{\theta} > 0$ で運動しはじめ、$\theta = \theta_A$ で最もおもりは高い位置に来ると考える。これは、前問までの状況と矛盾しないゆえ、結果がそのまま使える。(6) 式を積分し、最高点に達する時刻 t が

$$t = \frac{1}{2\omega}\int_0^{\theta_A} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_A}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

と書けることを確かめよ。これはちょうど、1/4 周期を与えている。

(8) ここで、

$$\sin\frac{\theta_A}{2} \equiv k, \qquad \sin\frac{\theta}{2} \equiv k\sin\varphi$$

と定数 k、および、変数 φ を導入すると、求める周期が

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

となることを示せ。

(9) 上の式を

$$T = \frac{4}{\omega}K(k)$$

と書き換えたときの関数

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

は第一種の完全楕円積分と呼ばれるものであり、さまざまな特殊関数のひとつである。

この積分を実行することは不可能であるが（コンピュータで数値計算をやるしかない。)、ここでは、MacLaurin 展開を使うことにより通常考える微小振動より、少しだけ振動が大きい場合を考えその解を求めてみることにする。

被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ は、最大振幅 θ_A が小さいときには

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi\cdots$$

と展開できることを示せ。

(10) これにより周期 T が

$$T = \frac{2\pi}{\omega}(1+\frac{1}{4}k^2\cdots)$$

と書けることを示せ。

この結果から、振り子の等時性について再考察をせよ（ここでの k の定義に注意せよ)。

[6] 垂直にぶらさげたバネ にとりつけられたおもりの運動の方程式を非斉次方程式としてみて、まず特解を求め、対応する斉次方程式を解く、という方法で解け。

[7] [単振動の方程式。 べき級数展開の方法。]
単振動の方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

を、解が

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots,$$

と t のべき級数の形で表されると仮定する。ただし、$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ は定数である。なお級数の収束性は仮定する。

(1) 上の仮定を方程式に代入し、t の昇べきの順に整理せよ。($(\cdots)+(\cdots)t+(\cdots)t^2+(\cdots)t^3+\cdots = 0$ などと書く。)

(2) これが時刻 t のいかんにかかわらず成り立つためには、各べき の係数はゼロでなければならない。このことから、係数 $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$ を係数 a_0 または、a_1 で書き表せ。

(3) (2) の結果をもとの展開式に代入することにより解が

$$x(t) = a_0 \cos \omega t + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega t$$

となることを示せ。（三角関数に関する MacLaurin 展開を利用せよ。）

(4) 問題 [1] の方程式。すなわち、速度に比例する抵抗をうけながら落下する物体の方程式を (3) までの べき級数展開の方法を用いて解いてみよ。なお方程式は簡単に

$$m\dot{v} = -mg - m\gamma v$$

とせよ。

[参考] ここで、$1, t, t^2, t^3, t^4, t^5 \cdots$ は独立である。

諸君の中には、一次独立性の話を直交単位ベクトルとのアナロジーで説明したことから、「これらは同様に直交しているのだろうか？」と疑問をもつかもしれない。（実際に何人かはこの質問をしてきたのである！）

関数をこのように級数で表すことは大変有効であるが、その際必ずしも直交性は必要ではない。独立でさえあれば良いのである。３次元空間の任意のベクトルを表現するのにも、いつでも直交単位ベクトルを用いなければならないわけではない。お互いに独立であるベクトルが３つありさえすれば、それらの線形結合で３次元空間の任意のベクトルは表現できるわけである。

このことを踏まえた上で、上の疑問について簡単にコメントしておこう。

まず、この疑問に答える前に、この場合の直交性とは何か？と考えねばならない。ベクトルではないからスカラー積（内積）がゼロと簡単には言えそうにない。そもそもそんな演算があるのだろうか？

実は、このような t の関数の集まりにも（もちろん t でなくて何の関数であってもよい。）”内積”なるものが定義できる。t の関数 $f(t)$、$g(t)$ があったとき、これらの内積は

$$(f, g) = \int_b^a f(t) g(t) dt$$

で定義される。ここで、a、b は定数である。

この”内積”がゼロであるとき、ベクトルと同様に（関数空間において）直交しているという。

さて、この定義を用いると、上の $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5 \cdots$ は直交しているだろうか？

実は、これらは現段階では独立ではあるが（関数空間において）直交はしていない！しかし、これらをうまく組あわあせ、独立かつ直交とすることはできる。この系統的な手続きをシュミット (Schmidt) の直交化法という。（線形代数で学んだものと同じである。）その際、内積の定義における積分の上端 a と下端 b の取り方によりさまざまな関数の集まりができる。つまり直交化の仕方は一義的ではない。

このさまざまな関数にはそれぞれ名前がついており、エルミート直交多項式、ルジャンドル直交多項式、ラゲール直交多項式 $\cdots$ などと呼ばれるものがあり（さきほどの楕円積分と同様にこれらは特殊関数に属する）、諸君は量子力学を学ぶときに頻繁にこれらの関数に出合うであろう。

しかし、もちろんいまは難しいのでふーん、そんなもんか $\cdots$ と思っていればまあいいでしょう。さらに理解したい人は個別に質問してください。

[8] 減衰振動の方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

は、ω と γ の大小関係により３通りに場合わけして解かねばならなかった。ここでは特に $\omega = \gamma$ を満たすときの微分方程式を、講義で示した方法とは別の方法で解いてみよう。まず問題の方程式は

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0$$

となる。

(1) この方程式は

$$(\frac{d}{dt} + \gamma)^2 x = 0$$

と書きかえられることをたしかめよ。

(2)

$$\frac{d^2}{dt^2}[\mathrm{e}^{\gamma t}x] = \mathrm{e}^{\gamma t}(\frac{d}{dt} + \gamma)^2 x$$

を示せ。

(3) (1) の方程式の両辺に左より $\mathrm{e}^{\gamma t}$ をかければ (2) の左辺になることがわかる。ここで $z = \mathrm{e}^{\gamma t}x$ とおき、(1)(2) から z のみたす方程式を書き、その一般解を求めよ。

(4) x の解を求めよ。

[9]　コイル、コンデンサー、抵抗を直列につないだ電気回路に交流電圧 $V(t) = V_0 \sin(\omega_0 t)$ をかけたとき、回路内の電流 I は

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = V_0\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

の微分方程式にしたがって変化する。これは、適当に定数をおきかえれば強制減衰振動の方程式と全く同じ形をしていることがわかる。

この式が得られることはここでは認めてしまってよい。来年度の電磁気学の授業で詳しく学ぶでしょう。

（物理演習 (10)、(11) を参照のこと。）

(1) $I = A\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$ とおくことにより特解を求めよ。

(2) 対応する斉次方程式（右辺をゼロとおいたもの）の解を $I = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおくことによってもとめよ。

(3) 一般解を書け。また十分時間が経った時の解（定常解）はどうなるか？

(4) 共鳴条件を求めよ。

(5) 抵抗 R が小さく、$L \gg R$ および、$\frac{1}{C} \gg R$ をみたすときを考える。このときさらに、条件 (i)$\omega_0 \gg \frac{1}{\sqrt{LC}}$ （コンデンサーの容量 C が非常に大きく、実質コイルだけの回路に相当する。）、(ii) $\frac{1}{\sqrt{LC}} \gg \omega_0$（コンデンサーの容量が小さく実質コンデンサーだけの回路に相当する。）を満たすとき、それぞれ定常解の位相は電源電圧より、どのくらい進んでいるか？または遅れているか？

[10] ラジオの選局について考える。ラジオのアンテナにはさまざまな周波数の電波が重ね合わさってはいってくる。これは、アンテナ内の電子の振動を引き起こすが、この振動もいろんな周波数の重ねあわせで複雑なものとなっている。しかし、日常我々は、聞きたい放送局にうまくチューニングし、好きな番組を選んで聞いている。これはどのような機構によっているのだろうか？

非常におおざっぱに言って、ラジオのなかには、コイル、コンデンサー、抵抗からなる、LCR 回路がはいっている。アンテナ内に起こる電子の振動はこの LCR 回路にかかる強制力になる。

電子の振動を示す関数を $F(t)$ と書くと、回路内の電流は方程式

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=F(t)$$

に従うと考えられる。

ここでは簡単のため $F(t)$ が 2 つの周波数のみを含み

$$F(t)=F_0\cos(\omega_0 t)+F_1\cos(\omega_1 t)$$

と書かれると仮定しよう。

(1) 上記方程式の定常解を書け（物理演習 (11) 参照)。

(2) いま「オールナイトニッポン」 を聞いているとする。これはニッポン放送の周波数 (1242 Hz) がちょうどラジオ内の回路と共鳴しているからと考えられる。対応する角振動数が ω_0 であったとすると、ω_0 はいくらになるか？

(3) ラジオの CH をいじっていたら、「歌謡ワンダーランド」が聞こえてきてしまった（ラジオ日本：1422Hz)。これはちょうど ω_1 の共鳴に対応してるとする。ラジオのチューニングは回路内の可変コンデンサーの容量を変化させることにより行っているが、どのくらいの変化をさせたことになるだろうか？もとのコンデンサーの容量を基準に何 % 変化したかを書け。なおここでも、回路は $L \gg R$ および、$\frac{1}{C} \gg R$ の条件をみたすものとせよ。

[11] 質量 m の球体が、流体中を速度の 2 乗に比例する抵抗（比例係数 μ）を受けながら、初速度 v_0 で落下しはじめた。今 v_0 は自然落下の場合の終端速度 $\sqrt{mg/\mu}$ より大きいとすれば、その後速度はどのように変わっていくか？運動方程式を問題に合った初期条件のもとで解き、解の図を書く事（漸近線もきちんと書け）。ただし、流体の及ぼす浮力は無視せよ。

[あとがき]

まえおきで 8 人の学生諸君に謝辞を書きましたが、通常論文などにおける謝辞というものは、名前を書かれた人物がその論文の責任の一端を担うということになっています。したがってこの場合も、問題について不満等があった場合にはどんな理不尽なことでもよいから、この 8 人にまず文句を言うように（笑）。

最後に、問題が多すぎるだろうか $\cdots$ と不安を抱いていた出題者に「なんだ、簡単じゃん。」の一言で勇気づけてくれた 宮下君 に特に感謝しておきます。