

[1] 連続な関数 $f(t)$ が与えられたとき、この関数を

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2!} + f'''(0)\frac{t^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{t^4}{4!} + f^{(5)}(0)\frac{t^5}{5!} + \cdots$$

と展開することが可能であり、 $t = 0$ の回りの Taylor 展開 (Maclaurin 展開) という。このことを利用し、次の関数を $t = 0$ のまわりで Taylor 展開し、 t^5 まで書け。

$$(1) f(t) = e^t, \quad (2) f(t) = \cos t, \quad (3) f(t) = \sin t$$

[2] $(1+x)^\alpha$ (α は実数とする。) を $x = 0$ の回りで、Taylor 展開することにより、

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

を示せ。またこのことから

$$(1) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots, \quad (2) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$$

となることを示せ。

[3] 指数関数の展開式

$$f(t) = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

を利用し、以下の 3 通りの方法で e の近似値を求め、展開式の収束性についてわかったことを書け。

$$(1) e = f(1), \quad (2) e = [f(\frac{1}{2})]^2, \quad (3) e = [f(\frac{1}{4})]^4$$

なお真の値は、 $e = 2.718281828459 \cdots$ である。

[4] 長さ L 、断面積 S の金属片がある。初め電子は金属の中で勝手に熱運動しているが、この金属片の X 軸方向 (長さ L にそった方向) の両端に電位差 V を与えたとき、金属内には、 $\mathbf{E} = (V/L)\mathbf{i}$ と表される電場ベクトル $\mathbf{E}$ が生じ、この電場ベクトルにより電子は $-e\mathbf{E}$ の力を受ける。ここで、 $\mathbf{i}$ は X 軸方向の単位ベクトルであり、 $-e (< 0)$ は電子の電荷である。一方、金属中で電子が運動する場合、電子は原子の熱振動による抵抗力を受ける。ここではその力を、電子の速さに比例する強さをもち、速度の向きと反対に働くものと仮定しよう。すなわち $-(m/\tau)\mathbf{v}$ と表すことができるものとする。このとき τ は緩和時間と呼ばれ、電子がある原子から運動をさまたげられたのち、次に他の原子に運動をさまたげられるまでの時間間隔の目安となるものである。

(1) 電子の質量を m として、電子の従う運動方程式をベクトル形式で書け。

(2) 電子の初めの位置を、 $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ 、速度を $\mathbf{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ として、電圧をかけてから、時刻 t だけたったときの電子の速度ベクトルを電場ベクトル $\mathbf{E}$ を用いて表せ。

(3) $t \rightarrow \infty$ の極限での電子の速度ベクトルを求めよ。この結果はなにを意味するか？

(4) 電場をかけて十分時間がたったときを考える。単位体積中に電子が N 個あったとき金属片を単位時間に通過する電子の数を求めよ。ただし、電子の間に働く力は無視する。

(5) 電流ベクトル $\mathbf{I}$ は単位時間に断面を通過した電子の総電荷量として定義される。このとき電流ベクトルが電場ベクトルと同じ向きを向くことを示せ。また電流の大きさを I とすれば、 $V = IR$ (オームの法則) と書けることを示せ。