

[1] 古代ギリシャの哲学者及び自然科学者であるアリストテレスは、落下する物体について「重いものほど早く落ちる」と言った。その後ガリレイが登場するまで、およそ2000年ものあいだ人々に信じられてきた落体の法則に関するこの「誤解」をニュートン力学の立場から「理解」したい。

空気中を落下する質量  $m$  半径  $a$  の球状物体を考える。このときこの物体は落下の速度ベクトル  $\boldsymbol{v}$  に比例した空気抵抗力を速度ベクトルの反対向きにうける(粘性抵抗という)。流体力学のストークスの法則によればこの力は  $6\pi a\eta\boldsymbol{v}$  で表される。 $\eta$  は空気など媒質によって決まる抵抗力の強さの程度を表す粘性係数と呼ばれる定数である。

以下の問題を解く際、座標系の原点および各座標軸の向きは各自設定し図を書くこと。

(1) 運動方程式をベクトル形式で立てよ。(ヒント:  $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$  とし、 $\boldsymbol{F}$  を問題にあったベクトルで書く。)

(2) 運動方程式を成分で書け。

(3)  $t = 0$  で物体がたかさ  $H$  の非常に高い場所にあり、初速度0で落下を始める。ある時刻  $t$  での物体の速度ベクトル  $\boldsymbol{v}$  を微分方程式を解くことによって求めよ。また特別な場合として、 $\eta \rightarrow 0$  の極限をとったとき速度が質量に依存しなくなることを示せ。(例:  $\boldsymbol{v} = ( \quad , \quad )$  などと書く。)

(4) 時間が十分に経ったとき、落下速度はある一定値に近づく。その速度(終端速度)を(3)の結果から  $t \rightarrow \infty$  の極限をとることによって求めよ。

(5) (4)の結果を考察しよう。半径  $a$  が同じで質量が異なる2つの物体を同時に落下させたとしても、どのような状況が観測されると考えられるか?

[2] 心ない少年が、木にぶらさがっている猿にぶつけてやろうと、猿をめがけてボールを投げた。それを目撃して驚いた猿は、ぶら下がっている木の枝から手を放して落ちていった。

しかし…不幸にも、猿は空中で必ずボールにぶつかってしまうことを示せ。

なお、少年は地面より高さ  $x_0$  の地点におり、初速度  $v_0$ 、水平面とのなす角度  $\theta$  で質量  $m$  のボールを投げ上げたとする。また、猿の地面への落下前に、ボールは少年と猿との水平距離  $l$  を移動できるものとする。

問題を解く際、運動方程式をベクトル形式で書き。そのうえで、各成分の微分方程式を解くという手続きをとること。また座標系の原点および各座標軸の向きは各自設定し図を書くこと。