

[1] 2次元直交座標系 (デカルト座標系) において $r = (3, 3)$ と表される位置ベクトル、および $r = (3, -\sqrt{3})$ と表される位置ベクトルを極座標で表せ。

[2] 2次元直交座標系での単位ベクトルを i と j とすると、極座標系における単位ベクトル e_r と e_θ は

$$\begin{aligned} e_r &= \cos \theta \, i + \sin \theta \, j \\ e_\theta &= -\sin \theta \, i + \cos \theta \, j \end{aligned}$$

と表される。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{de_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} e_\theta \\ \frac{de_\theta}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} e_r \end{aligned}$$

となることを示せ。

[3] 極座標における位置ベクトル r は

$$r = r e_r$$

と書ける。このことと前問の結果を利用して、速度ベクトルが

$$v = \frac{dr}{dt} e_r + r \frac{d\theta}{dt} e_\theta$$

となること、すなわち速度ベクトルの r 、 θ 成分が

$$\left(\frac{dr}{dt}, r \frac{d\theta}{dt} \right)$$

で与えられることを示せ。

等速円運動は上記の速度ベクトルの特別な場合として表現できる。どのような場合か？

[EXTRA] 直交単位ベクトル、 i 、 j 、 k を用いて書かれる 2 つのベクトル

$$A = 3i + j + 2k, \quad B = 2i$$

を考える。

(1) 2 つのベクトルのスカラー積を求めよ。

(2) もとの座標系を Z 軸の正の方向から見て反時計方向に $\pi/2$ だけ回転する。こうして得られた座標系における A と B の形を求めよ。(ヒント：新しい座標系での新しい直交単位ベクトルを i' 、 j' 、 k' とし、まず 2 種類の直交単位ベクトル間の関係を求める。)

(3) 新しい座標系で スカラー積 $A \cdot B$ を求めよ。得られた結果から、スカラー積についてなにが言えるか？