

[1] 太陽（質量 M ）のまわりの惑星（質量 m ）の運動を考える。

(1) 2次元極座標を用いて各成分の運動方程式を書け。

(2) θ 成分の方程式から、面積速度が定数となることを示せ。

(3) (2) を利用し、(1) における r 成分の方程式を 変数 r だけの方程式にした後、両辺に $\dot{r}$ を掛け時間で積分することにより、力学的エネルギー保存則

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}) - G\frac{mM}{r} = E$$

を導け。ただし、 $h/2$ は面積速度であるとする。

(4) 上の式で第2、第3項の和をポテンシャル関数 $U(r)$ とみなし、これを r の関数として図示せよ。また、極小値を与える $r = r_0$ と、極小値 $V(r = r_0)$ を求めよ。

(5) 円軌道を描く惑星のエネルギーを面積速度 $h/2$ の関数として求めよ。この運動を、(4) の図に書き込め。

(6) 一般に太陽の回りを運動する天体（惑星程度の質量）の描く軌道を、天体の力学的エネルギー E と、面積速度 $h/2$ を用いて表せ。

(7) 惑星が楕円軌道を描いて運動している場合、軌道の長半径と短半径を、エネルギー E と面積速度 $h/2$ を用いて表せ。この結果から、ある固定したエネルギーに対し、異なる角運動量を持った惑星の運動の軌道を図示せよ。（円運動とその他2つの軌道を書け）