

[1] 単位長さあたりの質量が ρ の無限に長い線から距離 R にある質量 M の物体に働く万有引力の大きさは $2G\rho M/R$ であることを示せ。

[2] 長さ $2L$ の線の垂直二等分線上での座標 r の点を考える。線の質量は M で、座標原点は線上にあるとする。

(1) 点 r にある質量 m の質点のポテンシャルエネルギーを求めよ。ただし、ポテンシャルの基準点を無限遠方にとり、その値をゼロとせよ。

(2) r にある質点に働く万有引力を向きも含めて求めよ。

(3) (1) で求めた結果は、 $r \gg L$ のとき、 $U \approx -GmM/r$ になることを示せ。

[3] 電子（質量 $9.10 \times 10^{-31}[\text{kg}]$ ）が陽子を中心とする半径 $0.529 \text{ \AA} = 0.529 \times 10^{-10}[\text{m}]$ の円周上を運動している。

(1) 陽子のまわりの電子の角運動量を求めよ。

(2) 全力学的エネルギーはいくらか。[J] および、[eV] の単位で答えよ。

(3) ヘリウム原子核（電荷は $+2e$ ）の回りをこれと同じ角運動量で回る電子があるとすると、その軌道半径とエネルギー（[J] 及び [eV] の単位で答えよ）はどれだけか。

(4) 水素原子、ヘリウム原子それぞれにおいて、上で考えた電子を電離させるために必要なエネルギーを求めよ。[J] 及び [eV] の単位で答えよ。

[4] 中心力 $F(r) = -kr^n$ のうち、すべての束縛された物体が閉じた軌道を描く中心力は $n = -2$ と $n = 1$ のときだけである（Bertrand の定理。なお、円軌道からわずかにそれた軌道を考えるのみなら、もう少し条件はゆるくなる）。前者は万有引力やクーロン力を表し、後者は 3 次元調和振動子を表す（演習問題（１７）で見たように、球状銀河の内部での恒星に働く万有引力や、地球内部にある物体への万有引力もこの形になる）。

(1) $n = -2$ の場合（万有引力としてよい）に運動方程式を書き、ケプラーの 3 法則を導け。

(2) $n = 1$ のとき、ケプラーの法則と同様な法則が成り立つか？ 演習問題（８）

[4] を参考に考察せよ。

[5] 換算質量を用いたとき、ケプラーの法則はそのまま厳密に成立するだろうか？ 太陽の回りをまわる惑星の場合、原子核のまわりを回る電子の場合、それぞれについて考察せよ。

（ヒント）

[1] [2] 質量のある部分を微小区間に分割し、そのうち、ひとつの微小部分と考えている物体との間に、質点同志に働く、距離の 2 乗に反比例する万有引力が働くと見なす。これをすべての区間について足し上げる（積分する。）

[3] 1[eV] (1 電子ボルト) は、電気素量 $e = 1.602 \times 10^{-19}[\text{C}]$ を持つ粒子が、真空中において、1 ボルトの電位差をもつ 2 点間で加速されるときに得るエネルギーであり、 $1[\text{eV}] = 1.602 \times 10^{-19}[\text{J}]$ である。また 2 つの電荷 q, Q の間に働くクーロン

力は

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^3} \boldsymbol{r}$$

で与えられ、積 qQ が正ならば斥力を、負ならば引力を与える。ここで、 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} [\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2]$ は真空の誘電率とよばれる量である。

(コメント)

[1] [2] 質点の質量をある電荷で置き換え、線状物体に一樣な密度で電荷が分布しているとすると、両者に働くクーロン力がどれだけか…という問題になる。これは、来年度、電磁気学で初期にとりくむことになるだろう。

[3] 電離の問題は、万有引力のもとでの脱出速度の問題と考え方は同じである。

また、演習問題 (18) [2] の (2) でも見たように、陽子のまわりを回る電子の全力学的エネルギーが電子の角運動量で書くことができる。(半径や速度を含まず、角運動量と他の定数のみで書ける。) 量子論では、ここで、角運動量 L が量子化される

$$L = n\hbar \quad (n \text{ は自然数})$$

ことにより、エネルギーがとびとびの値をとり、たとえば $n = 1$ のときには、水素原子の基底状態のエネルギー ($-13.6[\text{eV}]$) を与える。(これは同時に電子軌道がとびとびの半径しかとれないことと、 $n = 1$ の場合にはその最小半径を与えることを意味する。)

この問題は、厳密には換算質量を用いなければならない。水素原子のときには、陽子の質量が電子の約 2000 倍もあるため、換算質量を用いなくてもあまり影響はないが (ほとんど電子の質量に等しい)、これが陽電子 (電子と同じ質量を持ち、陽子と同じ電荷を持つ) の回りを回る電子からなる系 (ポジトロニウムという) では、影響が大きく (換算質量は電子の質量の半分になる)、基底状態のエネルギーは、 $-6.8[\text{eV}]$ (水素原子の半分) になる。

…では、楽しいクリスマスと、よいお正月を。(N.Suzuki)