

[1] 古代ギリシャのアポロニウスは、著作「円錐曲線論」の中で、「2定点からの距離が和が一定の曲線は楕円であり、差が一定の曲線は双曲線である。」と述べている。過去のこの偉大なる賢者にならい、諸君もこれらの曲線の方程式を導出してみよう。

(1) 2つの点 F 、 F' の中点に原点をとり、それぞれの点までの原点からの距離を c とする。アポロニウスに従えば、このとき2次元平面上のある点 (x, y) までの F 、 F' からの距離 r 、 r' の和は

$$r + r' = 2a \quad a = \text{const.}$$

と書ける。この条件を満たす点 (x, y) の集合は以下の楕円の標準形に従うことを示せ。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{where } b^2 = a^2 - c^2$$

(2) 双曲線の場合、2点の差が

$$r - r' = 2a \quad a = \text{const.}$$

のように表されるというのが賢者の主張である。この条件を満たす点が以下の双曲線の方程式に従うことを示せ。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{where } b^2 = c^2 - a^2$$

(3) 図のように極座標をとれば、楕円及び双曲線が

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

に従うことを示せ。ただし、 $\epsilon < 1$ 、 $\epsilon > 1$ では双曲線を表す。

(4) 円及び放物線の場合、 ϵ に対しどのような条件を課せばよいか論ぜよ。

[2] (角運動量に関連した問題)

- (1) 中心力のもとで運動している物体は必ず2次元平面上を運動することを示せ。
- (2) 万有引力の作用のもとで円運動している物体の力学的エネルギーを物体の角運動量の大きさ L を用いて表せ。
- (3) 物体が万有引力のもとで等速円運動をしている場合に、ケプラーの第3法則を導け。
- (4) (3) のときの面積速度を求めよ。
- (5) 単振り子の角度方向の運動方程式を以下の角運動量に対する方程式から導出せよ。

$$\frac{dL}{dt} = N$$

[3] 質量 M のおもりが糸に結ばれ、水平面内で動くように束縛されている。糸の長さが R_0 のとき、物体は角速度 ω_0 で等速円運動しているとし、これを図のように糸を静かに中心方向に引いて、円運動の半径を $R < R_0$ に変える。

- (1) 運動エネルギーの変化を求めよ。
- (2) 張力 T を半径 r ($R < r < R_0$) の関数として求めよ。
- (3) 糸を引いた事による仕事を求め、(1)の結果と比較し、わかったことを書け。