物理演習問題（１５）１０月２６日

[1] 水平面とのなす角度 θ で、動摩擦係数 μ の斜面を考える。質量 m の物体を初速度 v_0 で斜面にそって上方に滑らせたら、距離 l だけすべって静止した。重力加速度を g とし、摩擦係数 μ を他の量を用いて表せ。

[2] 以下の Newton の方程式に エネルギー積分を行う事により、力学的エネルギー保存則を導け。
(1) 一様な重力の元での運動　　$m\ddot{z} = -mg$
(2) バネの単振動　　$m\ddot{x} = -kx$

[3] （単振り子）長さ l の糸でつるされた質量 m の物体を初速度 v_0 で水平方向に投げ出す。物体が円運動をするために初速度に課される条件を求めよ。ただし、エネルギー保存則を用い、糸の張力に着目すること。

[4] ２次元平面で、点A (x_0, y_0) から、点B $(x_0 + h, y_0 + k)$（h、k は正の微少量とする。）に達する以下の２つの経路を考える。

経路 I: 点Aから、X 軸に平行に点P $(x_0 + h, y_0)$ に達し、そこから点Bに至る。

経路 II: 点Aから、Y 軸に平行に点Q $(x_0, y_0 + k)$ に達し、そこから点Bに至る。

このとき、力 $\boldsymbol{F}$ で物体を運ぶ仕事を、２つの経路それぞれに沿って計算することにより、力 $\boldsymbol{F}$ が保存力であるためには条件

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

が成立することを示せ。

[5] 原点からの距離 r の関数として、ポテンシャル U が

$$U = \frac{1}{2}kr^2 - \frac{1}{8}k\alpha^2 r^4 \qquad k > 0, \alpha > 0$$

で与えられるとき、物体が有限の領域で運動するためには、質点の位置および、全エネルギーにどのような制限が課されるか？

ヒント：
[1] 摩擦力のした仕事により、力学的エネルギーが散逸する。
[2] エネルギー積分であるから、速度を両辺にかける。
[4] たとえば、点Aから点Pに至る仕事は、$\int_{x_0}^{x_0+h} F_x(x, y_0)dx$ であるが、ここで、変数変換 $x' = x - x_0$ を行う。x' は $x' < h$ をみたす微小領域しか変化しないことを利用し、被積分関数を以下のように ”点A (x_0, y_0) の回りで ”、Taylor 展開する。

$$F_x(x_0 + x', y_0) = F_x(x_0, y_0) + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x}|_{(x,y)=(x_0,y_0)} x' + \cdots$$