

[1] 単振動の方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

を以下の方法によって解け。

(1) 方程式を複素数に拡張する。

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

を考え、

$$z = x + i y$$

とおくことにより、 z が満たす方程式を書け。

(2)

$$z = e^{i\lambda t}$$

とおくことにより、 λ が満たす条件をもとめ、特解を求めよ。

(3) z に関する一般解を特解の線形結合により書き、その実部をとることにより、 x に関する一般解を求めよ。

[2] 物理演習（9）の [2] 番の問題の状況に、さらにバネの始点が時間によって変化する力 $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$ で強制的に動かされていることを考える。

このとき、おもりは運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx + 2m\gamma\dot{x} + F(t)$$

に従って運動する。この方程式は

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F(t)$$

と変形できるので、線形の非斉次常微分方程式である。

(1) 特解を $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ とおくことにより求めよ。

(2) 対応する斉次方程式 ($F(t) = 0$ とおいたもの) は減衰振動の方程式になっている。この解は物理演習（9）の [2] 番の (2) で求めているので、これを利用し、(1) の特解とあわせて、一般解を求めよ。

(3) 時間が十分にたったときの解を書け。

(4) (3) の定数の係数が最大になることを共鳴という。共鳴がおきるための条件と、 x の最大値を求めよ。

(5) 摩擦の効果がじゅうぶん小さいときの共鳴条件を求めよ。また、摩擦が全くないときにはどのようなことがおきるか？

(6) 強制力が、 $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t) + F_1 \cos(\omega_1 t)$ のように、2つの異なった振動数をもつ力の和で書かれるものであったとき、(2) や (3) で求めた解はどのように変更されるだろうか？

(7) (6) において、ちょうど系は振動数 ω_0 で共鳴を起こしていたとする。そこで、液体を水からより粘性抵抗の大きい液体に変えたらこんどは、 ω_1 で共鳴をおこした。 $\omega_1 = 1/2\omega_0$ であったとするといれかえた液体の粘性に関する γ の値はどうなるか？ ω_0 と水の粘性をしめす γ を用いてあらわせ。