物理演習問題（9）　２００３年6月１６日

[1]　演習問題（７）**[3]** では、速度の２乗に比例する空気抵抗（慣性抵抗）を考慮した場合の雨滴の落下運動を考えた。そこでは簡単のため、雨滴の終端速度のみを求めたが、今度は任意の時刻において雨滴の速度がいくらであるかを求めてみよう。雨滴の落下中の運動方程式

$$m\dot{v}_z = mg - \frac{1}{4}\pi\rho_0 a^2 v_z^2$$

は非線形の常微分方程式である。通常非線形の微分方程式は解く事が非常に難しいが（または、解析的に解けず数値計算に頼らざるを得ない。）、幸いこの方程式は変数分離形であり、さほど解く事が難しくない。

(1) まず、運動方程式を

$$\frac{dv_z}{g - \frac{1}{4m}\pi\rho_0 a^2 v_z^2} = dt$$

と変形する。次に左辺の分母を因数分解し、さらに左辺全体を部分分数に分解する$\cdots$という手続きにより解が（時刻$t=0$で雨滴の速度がゼロであるとして）

$$v_z = \sqrt{g/\mu}\tanh(\sqrt{\mu g}t)$$

となることを示せ。ただしここで、$\mu = \frac{1}{4m}\pi\rho_0 a^2$ とおいた。

(2) $t \to \infty$ の極限をとり、終端速度を求めよ。

(3) 演習問題（７）**[3]** では、運動方程式をベクトルで書けていないミスが多かった。そこで、このことを理解したのち、一様重力のもとで、速度の２乗に比例する抵抗を受けて運動する物体について、以下の特別な状況における１次元の運動方程式をたててみよ。

(i) 鉛直上向きにz軸の正の向きをとったときの物体の落下中の方程式。

(ii) 鉛直上向きにz軸の正の向きをとったときの物体の上昇中の方程式。

(iii) 鉛直下向きにz軸の正の向きをとったときの物体の上昇中の方程式

[2]　次の微分方程式が、線形か非線形であるかを理由を述べて判定せよ。

(1) $\ddot{x} = -\gamma\dot{x}^2$、　(2) $\ddot{x} = -\gamma\dot{x}$、　(3) $\ddot{x} = -\gamma\sin x$

[3]　連続な関数 $f(t)$ が与えられたとき、この関数を

$$f(t) = f(0) + f^{'}(0)\,t + f^{''}(0)\,\frac{t^2}{2!} + f^{'''}(0)\,\frac{t^3}{3!} + f^{(4)}(0)\,\frac{t^4}{4!} + f^{(5)}(0)\,\frac{t^5}{5!} + \cdots$$

と展開することが可能であり、$t=0$の回りのTaylor展開（Maclaurin展開）という。このことを利用し、次の関数を$t=0$のまわりで Taylor 展開し、t^5まで書け。

(1) $f(t) = \mathrm{e}^t$,　(2) $f(t) = \cos\,t$,　(3) $f(t) = \sin\,t$,　(4) $f(t) = \tan\,t$,　(5) $f(t) = \ln(1+t)$

[4]　$(1+x)^\alpha$　(αは実数とする。) を$x=0$の回りで、Taylor展開することにより、

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

を示せ。またこのことから以下を示せ

$$(1)\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots, \qquad (2)\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$$

[5]　指数関数の展開式

$$f(t) = \mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

を利用し、以下の３通りの方法でeの近似値を求め、展開式の収束性についてわかったことを書け。

(1) $\mathrm{e} = f(1)$,　(2) $\mathrm{e} = [f(\frac{1}{2})]^2$,　(3) $\mathrm{e} = [f(\frac{1}{4})]^4$

なお真の値は、$\mathrm{e} = 2.718281828459\cdots$である。

[6] 長さL、断面積Sの金属片がある。初め電子は金属の中で勝手に熱運動しているが、この金属片のX軸方向（長さLにそった方向）の両端に電位差Vを与えたとき、金属内には、$\boldsymbol{E} = (V/L)\boldsymbol{e}_x$と表される電場ベクトル$\boldsymbol{E}$が生じ、この電場ベクトルにより電子は$-e\boldsymbol{E}$の力を受ける。ここで、$\boldsymbol{e}_x$は$X$軸方向の単位ベクトルであり、$-e(<0)$は電子の電荷である。一方、金属中で電子が運動する場合、電子は原子の熱振動による抵抗力を受ける。ここではその力を、電子の速さに比例する強さをもち、速度の向きと反対に働くものと仮定しよう。すなわち$-(m/\tau)\boldsymbol{v}$と表すことができるものとする。このときτは緩和時間と呼ばれ、電子がある原子から運動をさまたげられたのち、次に他の原子に運動をさまたげられるまでの時間間隔の目安となるものである。

(1) 電子の質量をmとして、電子の従う運動方程式をベクトル形式で書け。

(2) 電子の初めの位置を、$\boldsymbol{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$、速度を$\boldsymbol{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$として、電圧をかけてから、時刻$t$だけたったときの電子の速度ベクトルを電場ベクトル$\boldsymbol{E}$を用いて表せ。

(3) $t \to \infty$の極限での電子の速度ベクトルを求めよ。この結果はなにを意味するか？

(4) 電場をかけて十分時間がたったときを考える。単位体積中に電子がN個あったとき金属片を単位時間に通過する電子の数を求めよ。ただし、電子の間に働く力は無視する。

(5) 電流ベクトル$\boldsymbol{I}$は単位時間に断面を通過した電子の総電荷量として定義される。このとき電流ベクトルが電場ベクトルと同じ向きを向くことを示せ。また電流の大きさをIとすれば、$V = IR$（オームの法則）と書けることを示せ。