

[1] 古代ギリシャの哲学者及び自然科学者であるアリストテレスは、落下する物体について「重いものほど早く落ちる」と言った。その後ガリレイが登場するまで、およそ 2000 年ものあいだ人々に信じられてきた落体の法則に関するこの「誤解」をニュートン力学の立場から「理解」したい。

空気中を落下する質量 m 半径 a の球状物体を考える。このときこの物体は落下の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ に比例した空気抵抗力を速度ベクトルの反対向きにうける（粘性抵抗という）。流体力学のストークスの法則によればこの力は $6\pi a\eta\boldsymbol{v}$ で表される。 η は空気など媒質によって決まる抵抗力の強さの程度を表す粘性係数と呼ばれる定数である。

以下の問題を解く際、座標系の原点および各座標軸の向きは各自設定し図を書くこと。

- (1) 運動方程式をベクトル形式で立てよ。（ヒント： $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$ とし、 $\boldsymbol{F}$ を問題にあったベクトルで書く。）
- (2) 運動方程式を成分で書け。
- (3) $t = 0$ で物体がたかさ H の非常に高い場所にあり、初速度 0 で落下を始める。ある時刻 t での物体の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を微分方程式を解くことによって求めよ。また特別な場合として、 $\eta \rightarrow 0$ の極限をとったとき速度が質量に依存しなくなることを示せ。（例： $\boldsymbol{v} = (\quad, \quad)$ などと書く。）
- (4) 時間が十分に経ったとき、落下速度はある一定値に近づく。その速度（終端速度）を (3) の結果から $t \rightarrow \infty$ の極限をとることによって求めよ。
- (5) (4) の結果を考察しよう。半径 a が同じで質量が異なる 2 つの物体を同時に落下させたとすると、どのような状況が観測されると考えられるか？

[2] 上記の結果を利用し、今度は雨について考えたい。雨も落下中空気抵抗を受け、落下速度が一定になると考えられる。ここでは雨滴が [1] のように球状であると仮定しよう。

- (1) 雨滴の密度を ρ とし、[1] の (4) で求めた終端速度を m のかわりに ρ を用いてあらわせ。
- (2) (1) の結果から、大きさの異なる 2 つの雨滴の落下速度についてなにが言えるか？
- (3) 重力加速度を $g = 9.8[\text{m/s}^2]$ 、空気の粘性係数を $1.8 \times 10^{-5} [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$ 、雨滴の密度を $1 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$ とすると、半径 $2 \times 10^{-3} [\text{m}]$ の雨滴は地表にどのくらいの速さで落ちてくるか？（終端速度に達しているとせよ。）

[3] 雨の落下速度はだいたい $10[\text{m/s}]$ 程度であり、[2] の (3) の結果はこれと大きく隔たっているはずである。このことは雨の落下速度を説明するためには速さに比例する抵抗力を考慮しただけでは不十分であることを示している。

そこで、雨の落下運動に対する空気の抵抗力が、雨の速さ v の 2 乗に比例して大きくなると仮定する。これは慣性抵抗と呼ばれるものであり、その大きさは

$$\frac{1}{4}\pi\rho_0 a^2 v^2$$

で与えられる。ここで ρ_0 は空気の密度、 a は雨滴の半径である。

- (1) 空気抵抗が速度の方向と常に反対向きに働くことを表現できるように上の式をベクトルに書き換えよ。
- (2) 雨滴の質量を m 、重力加速度を $\boldsymbol{g}$ とし、運動方程式をベクトルで書け。
- (3) 以下では、鉛直下向きに z 軸をとり、雨の運動は 1 次元のみとし、他の成分は考えないものとしよう。このとき雨滴の質量を m とすると、雨滴の落下中の運動方程式は

$$m\dot{v}_z = mg - \frac{1}{4}\pi\rho_0 a^2 v_z^2$$

となることを示せ。

- (4) 運動方程式において $\dot{v}_z = 0$ とおくことにより終端速度を求めよ。
- (5) 空気の密度を $\rho_0 = 1.205[\text{kg/m}^3]$ とし、[2] の (3) と同じ大きさの雨滴を考えるとすれば、雨滴の落下速度は何 $[\text{m/s}]$ になるか？