物理演習問題（２２）　２００４年１月２６日

[**1**]
(1) 単位長さあたりの質量（線密度）がρの無限に長い線から距離Rにある質量Mの物体に働く万有引力の大きさは$2G\rho M/R$であることを示せ。
(2) 線密度が一定で、全質量M、半径Rの円輪がある。このとき、円輪の中心を通り輪の面に垂直な直線上の質量mの物体に働く万有引力を求めよ。
(3) 面密度が一定での全質量M、半径Rの円盤がある。このとき、円盤の中心を通り、円盤に垂直な直線上の質量mの物体に働く万有引力を求めよ。
(4) (2)、(3) の解から、それぞれ、半径Rの大きさに比べて十分離れた地点における万有引力を求め、その結果からなにが言えるか考えよ。

[**2**] 長さ$2L$の線の垂直２等分線上での座標rの点を考える。線の質量はMで、座標原点は線上にあるとする。
(1) 点rにある質量mの質点のポテンシャルエネルギーを求めよ。ただし、ポテンシャルの基準点を無限遠方にとり、その値をゼロとせよ。
(2) rにある質点に働く万有引力を向きも含めて求めよ。
(3) (1) で求めた結果は、$r \gg L$のとき、$U \approx -GmM/r$になることを示せ。

[**3**] 中心力$F(r) = -kr^n$のうち、すべての束縛された物体が閉じた軌道を描く中心力は$n = -2$と$n = 1$のときだけである（Bertrand の定理。なお、円軌道からわずかにそれた軌道を考えるのみなら、もう少し条件はゆるくなる）。前者は万有引力やクーロン力を表し、後者は３次元調和振動子を表す（演習問題（２０）で見たように、球状銀河の内部での恒星に働く万有引力や、地球内部にある物体への万有引力もこの形になる）。
(1) $n = -2$の場合（万有引力としてよい）に運動方程式を書き、ケプラーの３法則を導け。
(2) $n = 1$のとき、ケプラーの法則と同様な法則が成り立つか？　演習問題（１０）[**4**] を参考に考察せよ。

[**4**] 換算質量を用いたとき、ケプラーの法則はそのまま厳密に成立するだろうか？太陽の回りをまわる惑星の場合、原子核のまわりを回る電子の場合、それぞれについて考察せよ。

[**5**]　太陽（質量M）のまわりの惑星（質量m）の運動を考える。
(1)　２次元極座標を用いて各成分の運動方程式を書け。
(2) θ 成分の方程式から、面積速度が定数となることを示せ。
(3) (2) を利用し、(1) におけるr成分の方程式を 変数r だけの方程式にした後、両辺に$\dot{r}$を掛け時間で積分することにより、力学的エネルギー保存則

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}) - G\frac{mM}{r} = E$$

を導け。ただし、$h/2$は面積速度であるとする。
(4) 上の式で第２、第３項の和をポテンシャル関数$U(r)$とみなし、これをrの関数として図示せよ。また、極小値を与える$r = r_0$と、極小値$V(r = r_0)$を求めよ。

(5) 円軌道を描く惑星のエネルギーを面積速度 $h/2$ の関数として求めよ。この運動を、(4) の図に書き込め。
(6) 一般に太陽の回りを運動する天体（惑星程度の質量）の描く軌道を、天体の力学的エネルギー E と、面積速度 $h/2$ を用いて表せ。
(7) 惑星が楕円軌道を描いて運動している場合、軌道の長半径と短半径を、エネルギー E と面積速度 $h/2$ を用いて表せ。この結果から、ある固定したエネルギーに対し、異なる角運動量を持った惑星の運動の軌道を図示せよ。（円運動とその他２つの軌道を書け）