

[1]

- (1) 中心力のもとで、物体が円軌道上を運動しているとき、この運動は必ず等速円運動であることを示せ。
- (2) 質量 M の物体からの万有引力の作用のもとで半径 r の等速円運動している質量 m の物体について運動方程式をたてよ。
- (3) このときの、角速度と、速さを、半径 r の関数として求めよ。
- (4) 角運動量 L が与えられたときの、この等速円運動の半径 r 及び物体の速さ v を、 L 、万有引力定数 G 、 M 、 m を用いて表せ。
- (5) 万有引力の作用のもとで等速円運動している物体の力学的エネルギー（運動エネルギー＋位置エネルギー）を物体の角運動量の大きさ L を用いて表せ。
- (6) 物体が万有引力のもとで等速円運動をしている場合に、ケプラーの第3法則を導け。
- (7) (6) のときの面積速度を求めよ。

[2] 電子（質量 $9.10 \times 10^{-31} [\text{kg}]$ ）が陽子を中心とする半径 $0.529 \text{ \AA} = 0.529 \times 10^{-10} [\text{m}]$ の円周上を運動している。

- (1) 陽子のまわりの電子の角運動量 L を文字式及び数値で求めよ。
- (2) 全力学的エネルギーはいくらか。まず角運動量 L を用いて文字式で表し、(1) の結果を利用し、([J] および、[eV] の単位により) 数値で答えよ。
- (3) ヘリウム原子核（電荷は $+2e$ ）の回りをこれと同じ角運動量で回る電子があるとすると、その軌道半径とエネルギー（[J] 及び [eV] の単位で答えよ）はどれだけか。
- (4) 水素原子、ヘリウム原子それぞれにおいて、上で考えた電子を電離させるために必要なエネルギーを求めよ。[J] 及び [eV] の単位で答えよ。

なお、1[eV] (1電子ボルト) は、電気素量 $e = 1.602 \times 10^{-19} [\text{C}]$ を持つ粒子が、真空中において、1ボルトの電位差をもつ2点間で加速されるときに得るエネルギーであり、 $1[\text{eV}] = 1.602 \times 10^{-19} [\text{J}]$ である。また2つの電荷 q 、 Q の間に働くクーロン力は

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^3} \mathbf{r}$$

で与えられ、積 qQ が正ならば斥力を、負ならば引力を与える。ここで、 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} [\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2]$ は真空の誘電率とよばれる量である。

(コメント)

- [1] の(5)で、これをたとえば水素原子の問題に置き換える。すなわち、万有引力をクーロン力で置き換えると、陽子のまわりを回る電子の全力学的エネルギーが電子の角運動量と他の定数のみ（半径や速さを含まない形）で書けたことになる。
 ([2] の(2)に相当) 量子論では、ここで、角運動量 L が量子化される

$$L = n\hbar \quad (n \text{ は自然数})$$

ことにより、エネルギーがとびとびの値をとり、たとえば $n=1$ のときには、水素原子の基底状態のエネルギー ($-13.6[\text{eV}]$) を与える。（これは同時に電子軌道がとびとびの半径しかとれないことと、 $n=1$ の場合にはその最小半径を与えることを意味する。）

この問題は、厳密には換算質量を用いなければならない。水素原子のときには、陽子の質量が電子の約2000倍もあるため、換算質量を用いなくてもあまり影響はないが（ほとんど電子の質量に等しい）、これが陽電子（電子と同じ質量を持ち、陽子と同じ電荷を持つ）の回りを回る電子からなる系（ポジトロニウムという）では、影響が大きく（換算質量は電子の質量の半分になる）、基底状態のエネルギーは、 $-6.8[\text{eV}]$ （水素原子の半分）になる。