物理演習問題（１５） ２００２年１０月２７日

[1] $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{e}_x + \sin t\boldsymbol{e}_y, \quad (0 \le t \le \pi/2)$ で表される円弧に沿って線積分

$$\int_c xy^3 ds$$

を計算せよ。

[2] 質量 m の物体が一様な重力 $m\boldsymbol{g}$ によって以下の３通りの経路にそって点Aから点Bまで運ばれる場合の、重力がなした仕事を求めたい。

座標軸は鉛直上向きに y 軸をとるものとし、点Aの座標は $(0, a, 0)$、点Bは $(0, -a, 0)$ で与えられる。

(1) 経路 C_1：AからBに至る直線にそって。

(2) 経路 C_2:点Aから、鉛直下方と角度 $\frac{\pi}{6}$ をなす直線にそって、点D $(-2a/\sqrt{3}, -a, 0)$ に至り、さらに、点Bまで直線状に進む。

(3) 経路 C_3：原点を中心とする半径 a の円にそって。ただし、点E $(a, 0, 0)$ を通過するものとする。

なお、上記の ”経路に沿って ”積分するために、以下のヒントを参照せよ。

ヒント：線積分 $\int_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ において、

経路 C_2：経路に沿った単位ベクトルを $\boldsymbol{t}$ とし、経路にそった微少変位を ds とすれば、$d\boldsymbol{r} = ds\boldsymbol{t}$ と書けるが、このとき、経路 C_2 上のD点に至るまでは、$\boldsymbol{t} = \cos\frac{\pi}{6}(-\boldsymbol{e}_y) + \sin\frac{\pi}{6}(-\boldsymbol{e}_x)$ と書く事ができる。またD点までの経路の長さは、$4a/\sqrt{3}$ である。

経路 C_3：$X-Y$ 平面上で極座標をとり、X 軸とのなす角度を θ とする。このとき、$d\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}_\theta d\theta$ と書ける。ただし、この場合 $d\theta$ は負である。$\boldsymbol{e}_\theta$ を直交単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ で書き直し、積分は、角度 θ について、$\pi/2$ から、$-\pi/2$ まで行う。

[3] 高さ h から、質量 m の物体を静かに放して落下させる。このとき物体が地上に達した時の速さを以下の２通りの方法によって求めよ。
(1) 力が物体になした仕事は、物体の運動エネルギーを増加させるという事実を利用する。
(2) Newton の運動方程式を初期条件を考慮して解く。

[4]
(1) ばねの先端に質点をつけたまま力を加え、質点を x_1 から x_2 の位置までばねの復元力にさからって動かすときの仕事を求めよ。なお、釣り合いの位置を原点とし、$x_2 > x_1 > 0$ とする。
(2) 質点をばねの釣り合いの位置から x_{max} だけひっぱって放した。このとき質点が釣り合いの位置を通過するときの運動エネルギーを、「物体がされた仕事は、物体の運動エネルギーの変化に等しい」という事実を利用することによって求めよ。
(3) 原点における質点の速度と変位 x_{max} との関係を求めよ。