

[1] 2次元直交座標系 (デカルト座標系) において以下で表される位置ベクトルを極座標で表せ。

(1) $\mathbf{r} = (2, 2)$ 、 (2) $\mathbf{r} = (-3, -\sqrt{3})$ 、 (3) $\mathbf{r} = (-\sqrt{3}, 1)$

[2] あるベクトル $\mathbf{A}$ は、2次元極座標系において、 r 成分が A_r であり、 θ 成分が A_θ であるという。ベクトル $\mathbf{A}$ を極座標系の基底ベクトルを用いて書き表せ。

[3]

(1) 位置ベクトルのデカルト座標成分 x 、 y を、極座標の変数、 r 及び θ を用いて書け。

(2) (1) を時間で微分することにより、速度ベクトル、加速度ベクトルの、デカルト座標成分を極座標の変数で表せ。

(3) 一般に、ベクトル $\mathbf{A}$ の極座標成分 A_r 、 A_θ は、デカルト座標成分 A_x 、 A_y と

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \end{bmatrix}$$

と関係づけられる。このことと (2) を利用し、速度ベクトル、加速度ベクトルの極座標成分を導け。

[4] 2次元直交直線座標系での基底ベクトル $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ と、2次元極座標系における基底ベクトル $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ との間には

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{bmatrix}$$

の関係がある。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta \\ \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

となることを示せ。

[5] 極座標における位置ベクトル $\mathbf{r}$ は

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

と書ける。このことを利用し、以下の問いに答えよ。

(1) 位置ベクトルの極座標成分 — r 成分、 θ 成分 — を書け。

(2) 問題 [4] の結果を利用して、速度ベクトル、加速度ベクトルを極座標系の基底ベクトルを用いて書き表せ。

(3) (2) の特別な場合として、等速円運動の速度ベクトル、加速度ベクトルを書き表し、それぞれの向きについて述べよ。