物理演習問題（１８） ２００２年１２月２日

[1]　以下にデカルト座標系で表された諸量を極座標の変数（及び単位ベクトル）を用いて表せ。
(1)

$$d\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy$$

(2)

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$$

(3) ラプラシアン

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ただし、(2) の結果を用いること。

[2]　地上からボールを地表面とのなす角度θで投げ上げた。このときのボールの最高点の高度を力学的エネルギー保存則を用いて求めよ。

[3]　空気の抵抗力$-m\gamma v$を受けながら落下運動する質量mの質点がある。この質点が静かに落下し始めてから時間Tだけたったとき、失われた力学的エネルギーはいくらか。運動は１次元のみでおこるものとせよ。

[4]　力（保存力）のベクトルは、等ポテンシャル面と直交することを示せ。

[5]　次のスカラーポテンシャルの勾配を計算することにより、保存力$\boldsymbol{F}$を求めよ。（ただし、以下では$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$とする。）
(a) $U(r) = -GmM/r$　　、(b) $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$

[6]　距離rだけ離れた、質量mとMの物体間に働く万有引力は

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

で与えられる。この力が保存力であることを示せ。

[7]　減衰振動の方程式

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x}$$

を考える。$\omega \gg \gamma$を満たす減衰が弱い場合に、力学的エネルギーがどのように散逸していくかを調べよう。
(1) 解が近似的に、$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$ となることを示せ。なお以下では簡単のため、$\alpha = 0$とせよ。
(2) 力学的エネルギーの一周期にわたる平均$\bar{E}$が、$\bar{E} = E_0 \mathrm{e}^{-2\gamma t}$（$E_0$はエネルギーの初期値。）となることを示せ。ただし減衰が弱い場合、一周期の間には振幅がほとんど変化しないことを考慮し、$\mathrm{e}^{-2\gamma t}$を時間平均の外に出して計算せよ。