

[1] 物体が速度に比例する抵抗を受けて運動するとき、その運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = -bv, \quad b > 0$$

で与えられる。これは定数係数の線形 (linear) 斉次 (同次:homogeneous) 常微分方程式であるから、解を指数関数 $e^{\lambda t}$ の形に仮定して解いてみよ。

[2] 質量 $1[\text{kg}]$ のおもりをぶら下げたとき、自然の長さから、 $0.1[\text{m}]$ だけ伸びたところでつりあうバネがある。重力加速度を $g = 10[\text{m/s}^2]$ として以下の問いに答えよ。

(1) バネ定数を求めよ。

バネに質量 $1[\text{kg}]$ のおもりをつけ、なめらかな床の上で水平方向に自然の長さから $0.01[\text{m}]$ だけ伸ばしたところで静かに手をはなした。

(2) 空気の抵抗は無視できるとし、以後のおもりの運動を論ぜよ。

(3) おもりの振動の周期を求めよ。

(4) おもりの最大の速さはいつでどれだけか？

[3] バネに質量 m のおもりをつけ、水をはった水槽の底で水平に振動させることを考える。このときおもりの振動は水によって妨げられるが、その抵抗は、大きさがおもりの速さに比例するいわゆる粘性抵抗であるとする (比例係数を $2m\gamma$ とせよ)。なお、水槽の底は非常に滑らかで、おもりと底との摩擦は無視できるほど小さいものとする。また、バネ自身が水からうける抵抗は無視せよ。

(1) バネ定数を k として運動方程式を立てよ。

(2) (1) の解を $Ae^{\lambda t}$ とおくことによって求めよ。 (A, λ は定数。) なお特性方程式を解く段階で必要に応じて場合わけすること。

(3) 水槽内のおもりの運動を実際に観察していたら、振動しながら振幅が小さくなっていくのが見られた。その振幅が 10 秒間で $1/e$ 倍になっていたとしたときの、振動の周期を求めよ。(問題 [2] と全く同じバネとおもりを使っているものとせよ。)

(4) (3) の周期は、問題 [2] の (3) の周期より、何%大きくなっているか？

(5) (3) の振動の様子をできるだけ正確なグラフにせよ。