物理演習　夏休みの宿題問題　　提出日 ２００１年１０月１日

[**1**]　「単振動の方程式－エネルギー積分の方法」
単振動の方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

を解きたい。

(1) 微分方程式の両辺に $\dot{x}$ をかけ、t で積分すると

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = C^2$$

となることを示せ（ヒント：x^2 および $\dot{x}^2$ を t で微分してみよ）。なお右辺の C は任意定数であり、左辺が正であることを C^2 と書く事により表現している。

(2) (1) の微分方程式は変数分離形になっている。実際

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega\ dt$$

と書き換えられることを示せ。なおここで、$C^2 = \omega^2 A^2$ のように、C を別の任意定数 A で置き換えた。

(3) 左辺の積分を $x = A\sin\theta$ と変数を置き換える事により行い、微分方程式の解が

$$\theta = \omega t + \alpha$$

となる事を示せ。なお α は任意定数である。

(4) このことから解が

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

となることを示せ。

[補足] この解法は、後期に力学的エネルギーの保存法則の議論をするときに再び登場する。

[**2**]　[単振動の方程式－べき級数展開の方法]
単振動の方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

を、解が

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots,$$

と t のべき級数の形で表されると仮定する。ただし、$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ は定数である。なお級数の収束性は仮定する。

(1) 上の仮定を方程式に代入し、t の昇べきの順に整理せよ。($(\cdots)+(\cdots)t+(\cdots)t^2+(\cdots)t^3+\cdots = 0$ などと書く。)

(2) これが時刻 t のいかんにかかわらず成り立つためには、各べき の係数はゼロでなければばならない。このことから、係数 $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$ を係数 a_0 または、a_1 で書き表せ。

(3) (2) の結果をもとの展開式に代入することにより解が

$$x(t) = a_0 \cos\omega t + \frac{a_1}{\omega}\sin\omega t$$

となることを示せ。（三角関数に関する MacLaurin 展開を利用せよ。）

(4) 速度に比例する抵抗をうけながら落下する物体の運動方程式を (3) までの べき級数展開の方法を用いて解いてみよ。なお方程式は簡単に

$$m\dot{v} = -mg - m\gamma v$$

とせよ。

[3] [単振り子ー振れ角があまり小さくない場合]

長さ l の糸の一端を固定し、他端に質量 m のおもりをつけた単振り子を考える。鉛直下方から角度 θ_A まで糸がたるまないようにおもりを引っ張り静かに手を放すとおもりは振動しはじめる。

(1) 問題に合った図を書き、おもりに働く力をすべて書け。

(2) 極座標を図に書き入れ、運動方程式を動径方向 (r 方向) および、角度方向（θ 方向）に対してたてよ。

(3) θ_A が非常に小さく近似的に $\sin\theta \approx \theta$ としたときの任意の時刻での角度 $\theta(t)$ を求めよ。

(4) 振り子の周期を求め、振り子の等時性について述べよ。

(5) θ_A があまり小さくないときを考える。（かつ、大きすぎないともする。$\theta_A < \frac{\pi}{2}$）このときの $\theta(t)$ の解を前問の方法を利用し解いていこう。

いま考えている方程式は

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \qquad (\omega^2 = \frac{l}{g})$$

である。これに $\dot{\theta}$ をかけ、時刻 $t=0$ から、ある時刻 t まで積分することにより、

$$(\dot{\theta})^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_A)$$

が得られることを示せ。なお初期条件は題意より、$t=0$ で、$\theta=\theta_A$、$\dot{\theta}=0$ である。

(6) 上式を三角関数の倍角公式を用いて

$$\dot{\theta} = \pm 2\omega\sqrt{\sin^2\frac{\theta_A}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

と書き換えよ。

(7) 時間の原点をとりなおして、$t=0$ のとき、振動の最下点におもりがあり、$\dot{\theta}>0$ で運動しはじめ、$\theta=\theta_A$ で最もおもりは高い位置に来ると考える。これは、前問までの状況と矛盾しないゆえ、結果がそのまま使える。(6) 式を積分し、最高点に達する時刻 t が

$$t = \frac{1}{2\omega}\int_0^{\theta_A} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_A}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

と書けることを確かめよ。これはちょうど、1/4 周期を与えている。

(8) ここで、

$$\sin\frac{\theta_A}{2} \equiv k, \qquad \sin\frac{\theta}{2} \equiv k\sin\varphi$$

と定数 k、および、変数 φ を導入すると、求める周期が

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

となることを示せ。

(9) 上の式を

$$T = \frac{4}{\omega}K(k)$$

と書き換えたときの関数

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

は第一種の完全楕円積分と呼ばれるものであり、さまざまな特殊関数のひとつである。

この積分を実行することは不可能であるが（コンピュータで数値計算をやるしかない。)、ここでは、MacLaurin 展開を使うことにより通常考える微小振動より、少しだけ振動が大きい場合を考えその解を求めてみることにする。

被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ は、最大振幅 θ_A が小さいときには

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi\cdots$$

と展開できることを示せ。

(10) これにより周期 T が

$$T = \frac{2\pi}{\omega}(1+\frac{1}{4}k^2\cdots)$$

と書けることを示せ。

この結果から、振り子の等時性について再考察をせよ（ここでの k の定義に注意せよ)。