

[1]

- (1) 単位長さあたりの質量（線密度）が ρ の無限に長い線から距離 R にある質量 M の物体に働く万有引力の大きさは $2G\rho M/R$ であることを示せ。
- (2) 線密度が一定で、全質量 M 、半径 R の円輪がある。このとき、円輪の中心を通り輪の面に垂直な直線上の質量 m の物体に働く万有引力を求めよ。
- (3) 面密度が一定での全質量 M 、半径 R の円盤がある。このとき、円盤の中心を通り、円盤に垂直な直線上の質量 m の物体に働く万有引力を求めよ。
- (4) (2)、(3) の解から、それぞれ、半径 R の大きさに比べて十分離れた地点における万有引力を求め、その結果からなにが言えるか考えよ。

[2] 長さ $2L$ の線の垂直二等分線上での座標 r の点を考える。線の質量は M で、座標原点は線上にあるとする。

- (1) 点 r にある質量 m の質点のポテンシャルエネルギーを求めよ。ただし、ポテンシャルの基準点を無限遠方にとり、その値をゼロとせよ。
- (2) r にある質点に働く万有引力を向きも含めて求めよ。
- (3) (1) で求めた結果は、 $r \gg L$ のとき、 $U \approx -GmM/r$ になることを示せ。

[3] 中心力 $F(r) = -kr^n$ のうち、すべての束縛された物体が閉じた軌道を描く中心力は $n = -2$ と $n = 1$ のときだけである（Bertrand の定理。なお、円軌道からわずかにそれた軌道を考えるのみなら、もう少し条件はゆるくなる）。前者は万有引力やクーロン力を表し、後者は 3 次元調和振動子を表す（演習問題（２０）で見たように、球状銀河の内部での恒星に働く万有引力や、地球内部にある物体への万有引力もこの形になる）。

- (1) $n = -2$ の場合（万有引力としてよい）に運動方程式を書き、ケプラーの 3 法則を導け。
- (2) $n = 1$ のとき、ケプラーの法則と同様な法則が成り立つか？ 演習問題（１０）[4] を参考に考察せよ。

[4] 換算質量を用いたとき、ケプラーの法則はそのまま厳密に成立するだろうか？ 太陽の回りをまわる惑星の場合、原子核のまわりを回る電子の場合、それぞれについて考察せよ。

[5] 太陽（質量 M ）のまわりの惑星（質量 m ）の運動を考える。

- (1) 2 次元極座標を用いて各成分の運動方程式を書け。
- (2) θ 成分の方程式から、面積速度が定数となることを示せ。
- (3) (2) を利用し、(1) における r 成分の方程式を 変数 r だけの方程式にした後、両辺に $\dot{r}$ を掛け時間で積分することにより、力学的エネルギー保存則

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}) - G\frac{mM}{r} = E$$

を導け。ただし、 $h/2$ は面積速度であるとする。

- (4) 上の式で第 2、第 3 項の和をポテンシャル関数 $U(r)$ とみなし、これを r の関数として図示せよ。また、極小値を与える $r = r_0$ と、極小値 $V(r = r_0)$ を求めよ。

- (5) 円軌道を描く惑星のエネルギーを面積速度 $h/2$ の関数として求めよ。この運動を、(4) の図に書き込め。
- (6) 一般に太陽の回りを運動する天体（惑星程度の質量）の描く軌道を、天体の力学的エネルギー E と、面積速度 $h/2$ を用いて表せ。
- (7) 惑星が楕円軌道を描いて運動している場合、軌道の長半径と短半径を、エネルギー E と面積速度 $h/2$ を用いて表せ。この結果から、ある固定したエネルギーに対し、異なる角運動量を持った惑星の運動の軌道を図示せよ。（円運動とその他2つの軌道を書け）