物理演習問題（２０）－２００１年１２月１０日

今回の物理演習問題は、まず、古代ギリシャは、アテネの学堂からの出題。

[1] 古代ギリシャのアポロニウスは、著作「円錐曲線論」の中で、「２定点からの距離の和が一定の曲線は楕円であり、差が一定の曲線は双曲線である。」と述べている。過去のこの偉大なる賢者にならい、諸君もこれらの曲線の方程式を導出してみよう。

(1) ２つの点 F、F' の中点に原点をとり、それぞれの点までの原点からの距離を c とする。アポロニウスによれば、このとき２次元平面上の２点 F、F' からの距離 r、r' の和が

$$r + r' = 2a \quad a = const.$$

と書けるような点 (x, y) の集合は楕円曲線を表している。このことを、上記の条件式が楕円の方程式の標準形

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad where\ b^2 = a^2 - c^2$$

と等価であることを確かめることにより示せ。

(2) 双曲線の場合、２点の差が

$$r' - r = 2a \quad a = const.$$

のように表されるというのが大賢者アポロニウスの主張である。この条件を満たす点が以下の双曲線の標準形の方程式に従うことを示せ。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad where\ b^2 = c^2 - a^2$$

(3) 図のように極座標をとれば、楕円及び双曲線が

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos\theta}$$

に従うことを示せ。ただし、$0 < \epsilon < 1$ では楕円、$\epsilon > 1$ では双曲線を表す。

(4) 円及び放物線の場合、ϵ に対しどのような条件を課せばよいか論ぜよ。

[2] ２次元極座標を考え、半径 r と半径 $r + dr$ の２つの円でかこまれる幅 dr を持った円輪のうち、角度 θ から、角度 $\theta + d\theta$ の直線で挟まれる領域の面積を厳密に求めよ。また、ここで、微小量 dr または $d\theta$ の２次までとるとすれば微小面積要素が $dS = r dr d\theta$ と表されることを示せ。

[3]

(1) 以下について、式と言葉で説明せよ。

(a) エネルギー　(b) 保存力　(c) 運動エネルギー

(d) 力学的エネルギー保存則　(e) 等ポテンシャル面

(2) 保存力と非保存力の例をあげよ。

[4]

(1) 太陽系から外宇宙へ旅をしたい。地球の軌道を出発し、太陽系外へ出るためにはどのくらいの初速度で地球の軌道を出発すればよいか。

(2) 火星の生命の痕跡を調べにいきたい。地球の軌道を出発し、火星探査をするためにはどのくらいの初速度で出発すればよいか。
（太陽の質量 2×10^{30}[kg]、太陽ー地球 間距離 1.5×10^{8}[km]、太陽ー火星 間距離は 地球の場合の 1.5 倍）

[5]
(1) 角運動量の x、y、z 成分をそれぞれ書け。
(2) 角運動量の z 成分を極座標を用いて表せ。
(3) 中心力のもとで運動している物体の角運動量は保存することを示せ。
(4) 中心力のもとで運動している物体は必ず 2 次元平面上を運動することを示せ。
(5) 中心力のもとで運動している物体の面積速度は一定であることを示せ。

[6]
(1) 質量 m の物体が等速直線運動をしている。このとき、座標原点の回りの物体の角運動量が変化しないことを示せ。
(2) 質量 m の物体が、半径 r の円周上を角速度 ω で等速円運動している。このとき物体が回転の中心に対して持つ角運動量を求めよ。
(3) 地球が太陽をまわる軌道を円とし、その半径を 1.5×10^{8}[km] とすれば、地球が太陽をまわる面積速度及び角運動量はいくらか。

[7]　質量 M のおもりが糸に結ばれ、水平面内で動くように束縛されている。糸の長さが R_0 のとき、物体は角速度 ω_0 で等速円運動しているとし、これを図のように糸を静かに中心方向に引いて、円運動の半径を $R < R_0$ に変える。
(1) 運動エネルギーの変化を求めよ。
(2) 張力 T を半径 r（$R < r < R_0$）の関数として求めよ。
(3) 糸を引いた事による仕事を求め、(1) の結果と比較し、わかったことを書け。

[8]　単振り子の角度方向の運動方程式を以下の角運動量に対する方程式から導出せよ。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$