物理演習問題（１９） ２００１年１２月３日

[1] 以下に 3次元デカルト座標系 で表された諸量を 3次元極座標 の変数（及び単位ベクトル）を用いて表せ。

(1)

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$$

(2)

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

(3) ラプラシアン

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ただし、必ず (2) の結果を利用すること。

[2] 万有引力

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

のポテンシャルエネルギーを求めよ。（基準点を無限遠方とせよ。）その際、[1] の (1) の結果を使ってまず、

$$\boldsymbol{r} \cdot \ d\boldsymbol{r} = r\ dr$$

示し、利用すること。

[3] 一様な密度で質量 M、半径 R の球体がある。球体外部の質量 m の質点に働く万有引力を求めよ。

[4]

(1) 地球の中心を通るまっすぐなトンネルを掘る。地表からボールを落としたら、ボールはトンネル内を単振動することを示せ。

(2) その周期を求めよ。

(3) 人工衛星が地表すれすれを等速円運動した場合の周期と (2) の結果を比較せよ。

ただし、トンネル内部はなめらかで、ボールとの摩擦はないとし、また、地球の自転も無視せよ。空気抵抗も考えなくてよい。

（万有引力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}$[N m^2/kg^2]、地球の半径 6400[km] 、地球の質量 6.0×10^{24}[kg]）

[5] 星雲の中での星の運動をしらべよう。星雲は全質量が M で、半径 R_0 の球形であり、内部の星の分布は一様であるとする。中心から $r < R_0$ の距離にある質量 m の星が、星雲中の他の星々の重力をうけて、星雲の中心のまわりを等速で円運動している。

(1) この星が、位置 r で受ける力を求めよ。

(2) 星の速さはどれだけか。