物理演習問題（１２） ２００２年７月１５日

[**1**] 長さ l の糸に質量 m のおもりをつけた振り子について以下の問いに答えよ。

(1) おもりの運動方程式をベクトルで書け。

(2) 極座標を用いて、動経方向、角度方向の運動方程式を書け。

(3) 微小振動における、角度方向の運動方程式を解け。

以下では $l = 0.4$[m]、$m = 0.1$[kg]、重力加速度は簡単のため $g = 10$[m/s] とする。

(4) 振動の周期を求めよ。

(5) この振り子の最大の振れ角が 0.1 ラジアン (約 6 度) のとき、おもりの速さが最大になるのはいつでその値はどれだけか？

[**2**] 物理演習（１１）の [**2**] 番の問題の状況に加え、さらに、おもりと反対側のばねの先端部を強制的に $A(t) = A\cos(\omega_0 t)$ で振動させた。ばねの自然長を l とし、ばねの先端の変化の中心を原点ととれば、おもりの運動方程式は

$$m\ddot{x} = -2m\gamma\dot{x} - k[x - l - A\cos(\omega_0 t)]$$

で表される。

(1) 上記運動方程式について説明せよ。（右辺第１項、第２項はそれぞれなにを意味しているか？符号まで含めて説明せよ。）

(2) 適当な変数変換 $x \to x\prime$ により、運動方程式を

$$m\ddot{x\prime} = -kx\prime - 2m\gamma\dot{x\prime} + kA\cos(\omega_0 t)$$

のように、簡単化できる。どのような変換か？

(3) 以下では、(2) を利用し、まず $x\prime$ の解を求めることにより x の解を求めてみよう。ここでは以下のステップにより解を求めよ。

(i) (2) の方程式を複素数に拡張する。すなわち、あらたに、方程式

$$m\ddot{y\prime} = -ky\prime - 2m\gamma\dot{y\prime} + kA\sin(\omega_0 t)$$

に従う、関数 $y(t)$ を考え、さらに、複素数 z を $z = x' + iy'$ で定義することにより $z(t)$ が従う微分方程式を立てる。

(ii) z が従う非斉次方程式の特解を、

$$z = A\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$$

とおく事により求め、その実部をとることにより、x' の特解を求める。

(4) (2) の方程式に対応する斉次方程式（$A(t) = 0$ とおいたもの）は減衰振動の方程式になっている。この解は物理演習（１１）の [**2**] 番の (2) で求めているので、これを利用し、(3) の特解とあわせて、$x\prime$ の一般解を求めよ。

(5) x の一般解を書け。

(6) 時間が十分にたったときの解を書け。

(7) (6) の振動部分の定数の係数が最大になることを共鳴という。共鳴がおきるための条件と、x の最大値を求めよ。