物理演習　夏休みの宿題問題　　提出日 １０月２日

[まえおき]
　夏休みの宿題は、前期の復習および時間の少なさのため説明しきれなかった重要な事項について問題を解く形で勉強してもらうよう作成しました。
　一見して分量が多く見えますが、これはなるべく独力でできるように問題の解き方を細かく説明したためです。したがって、実際に取り組んでみれば思ったより難しくはないでしょう。

[1]　[単振り子ー振れ角があまり小さくない場合] 長さ l の糸の一端を固定し、他端に質量 m のおもりをつけた単振り子を考える。鉛直下方から角度 θ_A まで糸がたるまないようにおもりを引っ張り静かに手を放すとおもりは振動しはじめる。

(1) 問題に合った図を書き、おもりに働く力をすべて書け。

(2) 極座標を図に書き入れ、運動方程式を動径方向 (r 方向) および、角度方向（θ 方向）に対してたてよ。

(3) θ_A が非常に小さく近似的に $\sin\theta \approx \theta$ としたときの任意の時刻での角度 $\theta(t)$ を求めよ。

(4) 振り子の周期を求め、振り子の等時性について述べよ。

(5) θ_A があまり小さくないときを考える。（かつ、大きすぎないともする。$\theta_A < \frac{\pi}{2}$）このときの $\theta(t)$ の解を前問の方法を利用し解いていこう。
　いま考えている方程式は

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \qquad (\omega^2 = \frac{l}{g})$$

である。これに $\dot{\theta}$ をかけ、時刻 $t=0$ から、ある時刻 t まで積分することにより、

$$(\dot{\theta})^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_A)$$

が得られることを示せ。なお初期条件は題意より、$t=0$ で、$\theta=\theta_A$、$\dot{\theta}=0$ である。

(6) 上式を三角関数の倍角公式を用いて

$$\dot{\theta} = \pm 2\omega\sqrt{\sin^2\frac{\theta_A}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

と書き換えよ。

(7) 時間の原点をとりなおして、$t=0$ のとき、振動の最下点におもりがあり、$\dot{\theta}>0$ で運動しはじめ、$\theta=\theta_A$ で最もおもりは高い位置に来ると考える。これは、前問までの状況と矛盾しないゆえ、結果がそのまま使える。(6) 式を積分し、最高点に達する時刻 t が

$$t = \frac{1}{2\omega}\int_0^{\theta_A} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_A}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

と書けることを確かめよ。これはちょうど、1/4 周期を与えている。

(8) ここで、

$$\sin\frac{\theta_A}{2} \equiv k, \qquad \sin\frac{\theta}{2} \equiv k\sin\varphi$$

と定数 k、および、変数 φ を導入すると、求める周期が

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

となることを示せ。

(9) 上の式を

$$T = \frac{4}{\omega}K(k)$$

と書き換えたときの関数

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

は第一種の完全楕円積分と呼ばれるものであり、さまざまな特殊関数のひとつである。

この積分を実行することは不可能であるが（コンピュータで数値計算をやるしかない。)、ここでは、MacLaurin 展開を使うことにより通常考える微小振動より、少しだけ振動が大きい場合を考えその解を求めてみることにする。

被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ は、最大振幅 θ_A が小さいときには

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi\cdots$$

と展開できることを示せ。

(10) これにより周期 T が

$$T = \frac{2\pi}{\omega}(1+\frac{1}{4}k^2\cdots)$$

と書けることを示せ。

この結果から、振り子の等時性について再考察をせよ（ここでの k の定義に注意せよ)。

[2] [単振動の方程式ーべき級数展開の方法]
単振動の方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

を、解が

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots,$$

と t のべき級数の形で表されると仮定する。ただし、$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ は定数である。なお級数の収束性は仮定する。

(1) 上の仮定を方程式に代入し、t の昇べきの順に整理せよ。($(\cdots)+(\cdots)t+(\cdots)t^2+(\cdots)t^3+\cdots=0$ などと書く。)

(2) これが時刻 t のいかんにかかわらず成り立つためには、各べき の係数はゼロでなければならない。このことから、係数 $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$ を係数 a_0 または、a_1 で書き表せ。

(3) (2) の結果をもとの展開式に代入することにより解が

$$x(t) = a_0\cos\omega t + \frac{a_1}{\omega}\sin\omega t$$

となることを示せ。（三角関数に関する MacLaurin 展開を利用せよ。）

(4) 問題 [1] の方程式。すなわち、速度に比例する抵抗をうけながら落下する物体の方程式を (3) までの べき級数展開の方法を用いて解いてみよ。なお方程式は簡単に

$$m\dot{v} = -mg - m\gamma v$$

とせよ。

[参考] ここで、$1, t, t^2, t^3, t^4, t^5 \cdots$ は独立である。

諸君の中には、一次独立性の話を直交単位ベクトルとのアナロジーで説明したことから、「これらは同様に直交しているのだろうか？」と疑問をもつかもしれない。（実際に何人かはこの質問をしてきたのである！）

関数をこのように級数で表すことは大変有効であるが、その際必ずしも直交性は必要ではない。独立でさえあれば良いのである。３次元空間の任意のベクトルを表現するのにも、いつでも直交単位ベクトルを用いなければならないわけではない。お互いに独立であるベクトルが３つありさえすれば、それらの線形結合で３次元空間の任意のベクトルは表現できるわけである。

このことを踏まえた上で、上の疑問について簡単にコメントしておこう。

まず、この疑問に答える前に、この場合の直交性とは何か？と考えねばならない。ベクトルではないからスカラー積（内積）がゼロと簡単には言えそうにない。そもそもそんな演算があるのだろうか？

実は、このような t の関数の集まりにも（もちろん t でなくて何の関数であってもよい。）”内積”なるものが定義できる。t の関数 $f(t)$、$g(t)$ があったとき、これらの内積は

$$(f, g) = \int_b^a f(t)g(t)dt$$

で定義される。ここで、a、b は定数である。

この”内積”がゼロであるとき、ベクトルと同様に（関数空間において）直交しているという。

さて、この定義を用いると、上の $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5 \cdots$ は直交しているだろうか？

実は、これらは現段階では独立ではあるが（関数空間において）直交はしていない！しかし、これらをうまく組あわあせ、独立かつ直交とすることはできる。この系統的な手続きをシュミット (Schmidt) の直交化法という。（線形代数で学んだものと同じである。）その際、内積の定義における積分の上端 a と下端 b の取り方によりさまざまな関数の集まりができる。つまり直交化の仕方は一義的ではない。

このさまざまな関数にはそれぞれ名前がついており、エルミート直交多項式、ルジャンドル直交多項式、ラゲール直交多項式 ⋯ などと呼ばれるものがあり（さきほどの楕円積分と同様にこれらは特殊関数に属する）、諸君は量子力学を学ぶときに頻繁にこれらの関数に出合うであろう。

しかし、もちろんいまは難しいのでふーん、そんなもんか ⋯ と思っていればまあいいでしょう。さらに理解したい人は個別に質問してください。

[8]　減衰振動の方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

は、ω と γ の大小関係により３通りに場合わけして解かねばならなかった。ここでは特に $\omega = \gamma$ を満たすときの微分方程式を、講義で示した方法とは別の方法で解

いてみよう。まず問題の方程式は

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0$$

となる。

(1) この方程式は

$$(\frac{d}{dt} + \gamma)^2 x = 0$$

と書きかえられることをたしかめよ。

(2)

$$\frac{d^2}{dt^2}[\mathrm{e}^{\gamma t} x] = \mathrm{e}^{\gamma t}(\frac{d}{dt} + \gamma)^2 x$$

を示せ。

(3) (1) の方程式の両辺に左より $\mathrm{e}^{\gamma t}$ をかければ (2) の左辺になることがわかる。ここで $z = \mathrm{e}^{\gamma t} x$ とおき、(1)(2) から z のみたす方程式を書き、その一般解を求めよ。

(4) x の解を求めよ。