物理演習問題（3）　２０００年４月２４日

[1] ベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ が、デカルト座標成分で、

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$$
$$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

とあらわされるとする。
(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ を直交単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ を用いて書き表せ。
(2) (1) と、直交単位ベクトルのスカラー積（内積）に関する性質を用いることにより、スカラー積 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ を成分で書き表せ。
(3) ベクトル $\boldsymbol{A}$ のデカルト座標成分 A_x、A_y、A_z のそれぞれを、$\boldsymbol{A}$ 及び、直交単位ベクトルを用いて表せ。
(4) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ が t の関数であるとき、(2) の結果を用いて次の公式を示せ。

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \cdot \boldsymbol{B}$$

[2] 半径 0.4m の円周上を等速円運動している質点が１秒間の間に５回転する。次の諸量を求めよ。
(1) 円運動の周期　(2) 角速度　(3) 質点の速さ　(4) 質点の加速度の大きさ

[3]
(1) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の “長さ”が時間がたっても変化しないとき、$\boldsymbol{r}$ とその速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ が直交することを示せ。
(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が、デカルト座標成分で、$\boldsymbol{r} = (r\ \cos\omega t,\ r\ \sin\omega t)$ と表されているとき、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ を計算せよ。また、加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて表せ。この位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は、$X-Y$ 平面上で、どのような運動をあらわしているか？
(3) (2) のような運動の場合、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ が直交することを示せ。また、これら２つのベクトル及び位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ がどのような関係にあるか図示せよ。

[4]
(1) 速度が一定（$= \boldsymbol{v}_c$）の運動を等速直線運動という。このとき時刻 t における物体の位置を求めよ。ただし、$\boldsymbol{x}(t=0) \equiv \boldsymbol{x}_0$ とせよ。
(2) 加速度が一定（$= \boldsymbol{a}$）の運動を等加速度運動という。このとき時刻 t における物体の速度と、位置を求めよ。ただし、$\boldsymbol{x}(t=0) \equiv \boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{v}(t=0) \equiv \boldsymbol{v}_0$ とせよ。

[5]
(1) 時刻 t における質点の位置 $\boldsymbol{x}(t)$ が

$$\boldsymbol{x}(t) = (A\ \cos(\omega t + \delta),\ A\ \sin(\omega t + \delta),\ v_0 t + z_0)$$

と表せる運動について速度および加速度を求めよ。またこの質点はどんな運動をするか？
(2) 時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が

$$\boldsymbol{v}(t) = (v_x^0 \mathrm{e}^{-\gamma t},\ v_y^0 \mathrm{e}^{-\gamma t},\ -u + (u + v_z^0)\mathrm{e}^{-\gamma t})$$

かつ

$$\boldsymbol{x}(0) = (0,\ 0,\ h)$$

と表せる運動について位置および加速度を求めよ。さらに $t \to \infty$ での速度を求めよ。ただし、γ および、u は正の定数とする。