物理演習問題（１８）　２０００年１１月２７日

[**1**]　以下の Newton の方程式に エネルギー積分を行う事により、力学的エネルギー保存則を導け。
(1) 一様な重力の元での運動　　$m\ddot{z} = -mg$
(2) バネの単振動　　$m\ddot{x} = -kx$

[**2**]　（単振り子）長さ l の糸でつるされた質量 m の物体を初速度 v_0 で水平方向に投げ出す。物体が円運動をするために初速度に課される条件を求めよ。ただし、エネルギー保存則を用い、糸の張力に着目すること。

[**3**]　２次元平面で、点A (x_0, y_0) から、点B $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ （Δx、Δy は正の微少量とする。）に達する以下の２つの経路を考える。

経路 I:　点Aから、X 軸に平行に点P $(x_0+\Delta x, y_0)$ に達し、そこから点Bに至る。

経路 II: 点Aから、Y 軸に平行に点Q $(x_0, y_0+\Delta y)$ に達し、そこから点Bに至る。

このとき、力 $\boldsymbol{F}$ で物体を運ぶ仕事を、２つの経路それぞれに沿って計算することにより、力 $\boldsymbol{F}$ が保存力であるためには条件

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

が成立することを示せ。

ヒント：
たとえば、点Aから点Pに至る仕事は、$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F_x(x, y_0)dx$ であるが、ここで、変数変換 $x' = x - x_0$ を行う。x' は $x' < \Delta x$ をみたす微小領域しか変化しないことを利用し、被積分関数を以下のように ”点A (x_0, y_0) の回りで ”、Taylor 展開する。

$$F_x(x_0+x', y_0) = F_x(x_0, y_0) + \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial x}|_{(x,y)=(x_0,y_0)} x' + \cdots$$

[**5**]　ポテンシャルが

$$U = -\frac{\lambda}{2a}\{1-(1-\mathrm{e}^{-ax})^2\}$$

で与えられるとき、運動が周期的であるための条件、および、微小振動における周期を求めよ。(λ および、a は正の定数とする。)