

[1]  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{e}_x + \sin t \mathbf{e}_y$ ,  $(0 \leq t \leq \pi/2)$  で表される円弧に沿って線積分

$$\int_c xy^3 ds$$

を計算せよ。

[2] 質量  $m$  の物体が一樣な重力  $mg$  によって以下の3通りの経路にそって点Aから点Bまで運ばれる場合の、重力がなした仕事を求めたい。

座標軸は鉛直上向きに  $y$  軸をとるものとし、点Aの座標は  $(0, a, 0)$ 、点Bは  $(0, -a, 0)$  で与えられる。

(1) 経路  $C_1$ : A から B に至る直線にそって。

(2) 経路  $C_2$ : 点Aから、鉛直下方と角度  $\frac{\pi}{6}$  をなす直線にそって、点D  $(-2a/\sqrt{3}, -a, 0)$  に至り、さらに、点Bまで直線状に進む。

(3) 経路  $C_3$ : 原点を中心とする半径  $a$  の円にそって。ただし、点E  $(a, 0, 0)$  を通過するものとする。

なお、上記の "経路に沿って" 積分するために、以下のヒントを参照せよ。

ヒント: 線積分  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  において、

経路  $C_2$ : 経路に沿った単位ベクトルを  $t$  とし、経路にそった微少変位を  $ds$  とすれば、 $d\mathbf{r} = ds t$  と書けるが、このとき、経路  $C_2$  上のD点に至るまでは、 $t = \cos \frac{\pi}{6}(-\mathbf{e}_y) + \sin \frac{\pi}{6}(-\mathbf{e}_x)$  と書く事ができる。またD点までの経路の長さは、 $4a/\sqrt{3}$  である。

経路  $C_3$ :  $X-Y$  平面上で極座標をとり、 $X$  軸とのなす角度を  $\theta$  とする。このとき、 $d\mathbf{r} = ae_\theta d\theta$  と書ける。ただし、この場合  $d\theta$  は負である。 $e_\theta$  を直交単位ベクトル  $e_x, e_y$  で書き直し、積分は、角度  $\theta$  について、 $\pi/2$  から、 $-\pi/2$  まで行う。

[3] 高さ  $h$  から、質量  $m$  の物体を静かに放して落下させる。このとき物体が地上に達した時の速さを以下の2通りの方法によって求めよ。

(1) 力が物体になした仕事は、物体の運動エネルギーを増加させるという事実を利用する。

(2) Newton の運動方程式を初期条件を考慮して解く。

[4]

(1) ばねの先端に質点をつけたまま力を加え、質点を  $x_1$  から  $x_2$  の位置までばねの復元力にさからって動かすときの仕事を求めよ。なお、釣り合いの位置を原点とし、 $x_2 > x_1 > 0$  とする。

(2) 質点をばねの釣り合いの位置から  $x_{max}$  だけひっぱって放した。このとき質点が釣り合いの位置を通過するときの運動エネルギーを、「物体がされた仕事は、物体の運動エネルギーの変化に等しい」という事実を利用することによって求めよ。

(3) 原点における質点の速度と変位  $x_{max}$  との関係を求めよ。