

[1] 線積分

$$\int_c [x \, dx + x \, dy]$$

を以下の3つの経路について計算せよ。

(1) $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1)$

(2) $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1)$

(3) $y = x$ にそって、 $(0, 0) \rightarrow (1, 1)$

[2] 線積分

$$\int_c [2(x^2 - y) \, dx + (y^2 + x) \, dy]$$

を曲線 $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{e}_x + (t^2 + 1)\mathbf{e}_y$, $(0 \leq t \leq 1)$ にそって実行せよ。

[3] 曲線 $C: y = \sqrt{x}$, $(0 \leq x \leq 3)$ に沿って積分

$$\int_c y \, ds$$

を実行せよ。

[4] ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y) = xy\mathbf{e}_x - x^2\mathbf{e}_y$ を考える。原点 $(0, 0)$ から点 $P(1, 1)$ までの線積分 $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を次の2つの経路に対して計算せよ。

(1) 原点から点 P に至る放物線 $y = x^2$ 。

(2) 原点から x 軸に沿って点 $Q(1, 0)$ に行き、次に y 軸に平行に点 P に至る。

[5]

(1) 次の関数を変数 x および y について偏微分せよ。

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, (b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(2) 関数 $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ (原点を除く) に関して $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ を示せ。