[1] 長さ l の糸に質量 m のおもりをつけた振り子について以下の問いに答えよ。

- (1) おもりの運動方程式をベクトルで書け。
- (2) 極座標を用いて、動経方向、角度方向の運動方程式を書け。
- (3) 微小振動における、角度方向の運動方程式を解け。

以下では $l = 0.4[\text{m}]$ 、 $m = 0.1[\text{kg}]$ 、重力加速度は簡単のため $g = 10[\text{m/s}^2]$ とする。

- (4) 振動の周期を求めよ。
- (5) この振り子の最大の振れ角が 0.1 ラジアン (約 6 度) のとき、おもりの速さが最大になるのはいつでその値はどれだけか？

[2] 物理演習 (1 1) の [2] 番の問題の状況に加え、さらに、おもりと反対側のばねの先端部を強制的に $A(t) = A \cos(\omega_0 t)$ で振動させた。ばねの自然長を l とし、ばねの先端の変化の中心を原点ととれば、おもりの運動方程式は

$$m\ddot{x} = -2m\gamma\dot{x} - k[x - l - A \cos(\omega_0 t)]$$

で表される。

(1) 上記運動方程式について説明せよ。(右辺第 1 項、第 2 項はそれぞれなにを意味しているか？符号まで含めて説明せよ。)

(2) 適当な変数変換 $x \rightarrow x'$ により、運動方程式を

$$m\ddot{x}' = -kx' - 2m\gamma\dot{x}' + kA \cos(\omega_0 t)$$

のように、簡単化できる。どのような変換か？

(3) 以下では、(2) を利用し、まず x' の解を求めることにより x の解を求めてみよう。ここでは以下のステップにより解を求めよ。

(i) (2) の方程式を複素数に拡張する。すなわち、あらたに、方程式

$$m\ddot{y}' = -ky' - 2m\gamma\dot{y}' + kA \sin(\omega_0 t)$$

に従う、関数 $y(t)$ を考え、さらに、複素数 z を $z = x' + iy'$ で定義することにより $z(t)$ が従う微分方程式を立てる。

(ii) z が従う非斉次方程式の特解を、

$$z = Ae^{i\omega_0 t}$$

とおく事により求め、その実部をとることにより、 x' の特解を求める。

(4) (2) の方程式に対応する斉次方程式 ($A(t) = 0$ とおいたもの) は減衰振動の方程式になっている。この解は物理演習 (1 1) の [2] 番の (2) で求めているので、これを利用し、(3) の特解とあわせて、 x' の一般解を求めよ。

(5) x の一般解を書け。

(6) 時間が十分にたったときの解を書け。

(7) (6) の振動部分の定数の係数が最大になることを共鳴という。共鳴がおきるための条件と、 x の最大値を求めよ。