保型L関数の twist と その特殊値について

東北大学大学院理学研究科数学専攻
千田雅隆

目 次

1 序 **2**

2 記号 **5**

3 楕円曲線と保型形式 **6**
3.1 楕円曲線 6
3.2 保型形式 7
3.3 楕円曲線と保型形式の L 関数の理論 10
3.4 楕円曲線及び保型形式に関するいくつかの予想及び結果 . . 11

4 半整数 weight の保型形式 **14**
4.1 半整数 weight の保型形式の定義 14
4.2 志村対応 15

5 保型 L 関数の non-vanishing **17**
5.1 Fourier 係数の non-vanishing 17
5.2 保型 L 関数の non-vanishing 20

6 応用 **23**
6.1 楕円曲線への応用 23
6.2 楕円曲線の場合の例 25
6.3 合同数問題への応用 30

1 序

本論文では, 保型 L 関数の quadratic twist の特殊値について考察し得られた結果及び楕円曲線の rank に関する問題への応用を紹介する.

初めに楕円曲線の場合についてその概観を見ておく. E を Weierstass 方程式

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

によって定まる楕円曲線とする. このとき, 楕円曲線 E の $\mathbb{Q}$ -有理点 (すなわち方程式 (1.1) の解で x と y がどちらも有理数となるもの) を全て見つけよという問題は整数論において古くから考えられてきた問題であり, 実質的には Fermat も考察していた問題である. この場合, 単に有理数解全体を考えるだけでなく, 無限遠点を付け加えて, 射影空間の中での E の有理数点全体の集合を考えることが重要である. 実際,

$$E(\mathbb{Q}) = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) \mid Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3\}$$

とおくとき ($E(\mathbb{Q})$ は Mordell-Weil 群と呼ばれる), ある演算の下で $E(\mathbb{Q})$ には abel 群の構造が入り, さらに Mordell-Weil の定理 (cf. Silverman [27]) により $E(\mathbb{Q})$ は有限生成になることが知られている. このことから

$$E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus (\text{有限群})$$

という形に書くことができる. このとき r を E の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の rank と呼び $\operatorname{rank} E(\mathbb{Q})$ と書く. 一般にこの rank を計算することは現在でも難しい問題である. いま, この楕円曲線の rank について, 特に次のような設定の下で問題を考える. E をひとつ決めたとき 0 でない整数 D に対して E_Dを方程式

$$E_D : y^2 = x^3 + aD^2x + bD^3$$

によって定まる楕円曲線とする. D を変化させたときの $\operatorname{rank} E_D(\mathbb{Q})$ の分布を調べるのは, 上で述べたようにやはり非常に難しい問題であるが, Goldfeld はこの問題に対し次のような非常に興味深い予想を提出した.

予想 1.1 (Goldfeld [10], average rank conjecture)

$$S(X) = \{D \in \mathbb{Z} \mid |D| < X,\ D \text{ は square-free}\}$$

とおくとき

$$\lim_{X \to \infty} \frac{\sum_{D \in S(X)} \operatorname{rank} E_D(\mathbb{Q})}{\#S(X)} = \frac{1}{2}.$$

より精密な予想としては次が知られている.

予想 **1.2 (density conjecture)** $\delta = 0, 1$ に対し

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\#\{D \in S(X) \mid \operatorname{rank} E_D(\mathbb{Q}) = \delta\}}{\#S(X)} = \frac{1}{2}.$$

この予想は rank が 0 のものと 1 のものが密度としては半分ずつでてきて, それ以外は密度としては 0 になってしまうということを意味している. density conjecture からは average rank conjecture が従うことが容易にわかる. ひとつの楕円曲線の twist の rank の分布は上のように予想されているがひとつの楕円曲線だけでなく, 複数の楕円曲線の twist を同時に考えたときは rank はどのように振る舞うのかという問題は非常に興味深い. 本論文では特に, いくつかの楕円曲線の rank が同時に 0 となるような square-free な整数 D がどのくらいあるかということについて, 具体的には次のような問題を考えていく.

問題 **1.3** $E^1, \ldots, E^r$ という r 個の楕円曲線に対し $\operatorname{rank} E^1_D(\mathbb{Q}) = \cdots = \operatorname{rank} E^r_D(\mathbb{Q}) = 0$ となる square-free な整数 D は無限に存在するか?

このような問題において Mordell-Weil 群を直接取り扱うのは難しい. そこで L 関数の特殊値を用いることによって, 問題を解析的に書き直すということを考える.

楕円曲線 E の L 関数 $L(E,s)$ は

$$a_p(E) = p + 1 - \#\{(X,Y,Z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p) \mid Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3\}$$

とおいたとき

$$L(E,s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - a_p(E)p^{-s} + \epsilon(p)p^{1-2s}}$$

と定義される. ここで ϵ は有限個の素数 p に対しては $\epsilon(p) = 0$ でありそれ以外の p に対しては $\epsilon(p) = 1$ となる. (正確な L 関数の定義は後で与える) Gross-Zagier, Kolyvagin, Wiles 等の仕事により $L(E,1) \neq 0$ ならば $\operatorname{rank} E(\mathbb{Q}) = 0$ となることが知られているので結局先の問題は

$$L(E^1_D, 1) \cdots L(E^r_D, 1) \neq 0$$

となる square-free な整数 D が無限に存在するかどうかという問題に言い換えられる. しかしたくさんの L 関数の値を同時に考えるというのは, や

はり難しい問題である. そこで, さらに保型形式の理論を使ってこの問題を考察していくことにする. 近年の Wiles 等の研究により, 楕円曲線の L 関数は weight が 2 の保型形式の L 関数になるということが明らかになった. 保型形式は 3 節で述べるように上半平面上の正則関数で保型性と呼ばれる性質を持つものであり, 次のような Fourier 展開を持つ.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}.$$

このとき保型形式の L 関数は

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

により定義される. さらにこの L 関数の twist は

$$L(f, \chi_D, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\chi_D(n)}{n^s}$$

となる.

このことから楕円曲線の L 関数を調べるためには保型形式の L 関数を調べればよいことがわかる. この事実を踏まえると先の問題は次のように一般化される.

問題 **1.4** $f_1(z) \in S_{2k_1}(N_1), \ldots, f_r(z) \in S_{2k_r}(N_r)$ という r 個の newform に対し $L(f_1, \chi_D, k_1) \cdots L(f_r, \chi_D, k_r) \neq 0$ となる square-free な整数 D は無限に存在するか?

保型形式の L 関数の twist の特殊値を計算するには, 志村対応の理論により半整数 weight の保型形式の Fourier 係数が分かればよいということが知られている. そこで本論文では半整数 weight の保型形式の Fourier 係数を調べ, 保型形式の L 関数の特殊値についての non-vanishing を調べた.

本論文の主結果は以下のように述べられる.

定理 **1.5**

$$g_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_i(n) q^n \in S_{k_i+1/2}(M_i, 1)$$

を $p \nmid M_i$ となるすべての素数 p に対する Hecke 作用素 T_{p^2} の固有関数で志村対応での像が

$$f_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i(n) q^n \in S_{2k_i}^{\mathrm{new}}(N_i, 1)$$

になるようなものとする. さらにすべての Fourier 係数 $b_i(m)$ はある代数体 K の整数であるとする. また v を 2 の上の素点とし,

$$s_i = \min\{\, \mathrm{ord}_v(b_i(m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, M_1 \cdots M_r) = 1 \,\}$$

とおく. このとき $s_i < +\infty$ であり, $M_1 \cdots M_r$ と素な square-free な整数 $m_0 = p_1 \cdots p_l$ (p_i は素数) があって $i = 1, \ldots, r$ に対して

$$\mathrm{ord}_v(b_i(m_0)) = s_i,\ L(f_i, \chi_{(-1)^{k_i} m_0}, k_i) \neq 0$$

を満たすならば, 無限に多くの square-free な l 個の素因子を持つ整数 m が存在して

$$\prod_{i=1}^{r} L(f_i, \chi_{(-1)^{k_i} m}, k_i) \neq 0$$

となる. さらに, ある定数 $C > 0$, $X_0 > 0$ があって任意の $X \geq X_0$ に対して

$$\#\left\{ m \in S(X) \;\middle|\; \prod_{i=1}^{r} L(f_i, \chi_{(-1)^{k_i} m}, k_i) \neq 0 \right\} \geq C \frac{X}{\log X}$$

が成り立つ.

謝辞 セミナーで面倒をみて下さいました中村哲男先生, 個人的に相談を聞いていただいた佐藤篤先生及び整数論セミナーの皆様に感謝をいたします.

2 記号

はじめに本論文で使用する記号をまとめておく. $\mathbb{Z}$ を有理整数全体のなす可換環, $\mathbb{Q}$ を有理数全体のなす体, $\mathbb{Q}_p$ を p 進体, $\mathbb{F}_p$ を p 個の元からなる体, $\mathbb{C}$ を複素数全体のなす体とする. 体 K に対し $\mathbb{P}^n(K)$ により n 次元射影空間を表すこととする. さらに $M_n(K)$ により n 行 n 列の K 上の行列全体のなす環を表すこととし, 一般線型群及び特殊線型群をそれぞれ

$$GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\},$$

$$SL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A = 1\}$$

により定義する.

3　楕円曲線と保型形式

ここでは楕円曲線及び保型形式に関する基礎事項を復習する.

3.1　楕円曲線

k を体とする. k 上の有理点をもつ genus が 1 の非特異な射影曲線を k 上の楕円曲線と呼ぶ. このとき E は Weierstrass 方程式

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3 \tag{3.2}$$

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in k)$ によって表せる曲線と同型になる. E が上の方程式 (3.2) で定まる曲線のとき,

$$b_2 = {a_1}^2 + 4a_2, \quad b_4 = 2a_4 + a_1a_3, \quad b_6 = {a_3}^2 + 4a_6,$$
$$b_8 = {a_1}^2a_6 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2{a_3}^2{a_4}^2,$$
$$\Delta = -{b_2}^2b_8 - 8{b_4}^3 - 27{b_6}^2 + 9b_2b_4b_6$$

とおく. Δを E の判別式と呼ぶ. $\Delta \neq 0$ のとき E は楕円曲線になる. よって E が方程式 (3.2) で定まり$\Delta \neq 0$ となる曲線のことを楕円曲線と考えてよい. さらに k の標数が 2 及び 3 と異なるときは Weierstrass 方程式として

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

という model がとれる. このとき$\Delta = -2^4(4a^3 + 27b^2)$ となる. 以降 K を代数体とする.

$$E(K) := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{P}^2(K) \mid Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3\}$$

とおく. E 上の 2 点 P, Q に対し P と Q を通る直線を l_1とする ($P = Q$ のときは接線とする). l_1と E の 3 番目の交点を R とおく. さらに R と無限遠点 O を通る直線を l_2とする. このとき l_2と E の 3 番目の交点を $P + Q$ と定義する. この演算によって $E(K)$ には abel 群の構造が入り, さらに次のことが知られている.

定理 3.1 (Mordell-Weil の定理, cf. Silverman [27]) $E(K)$ は有限生成 abel 群.

この定理によって $E(K)$ は次のように書くことができる.

$$E(K) \cong \mathbb{Z}^r \oplus (\text{有限群}).$$

この r を E の K 上の rank と呼び $\operatorname{rank} E(K)$ と書く.

定義 **3.2** E をWeierstass 方程式

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in \mathbb{Q})$$

によって定まる有理数体上の楕円曲線とする. このとき, 0 でない整数 D に対して E_Dを

$$E_D : y^2 = x^3 + aD^2x + bD^3$$

によって定まる楕円曲線とする. E_Dを D による quadratic twist と呼ぶ.

3.2 保型形式

この節では保型形式について述べる. $\mathbb{H}$ を上半平面, すなわち

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

とする. $SL_2(\mathbb{Z})$ の $\mathbb{H}$ への作用を

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{H}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

によって定める. また,

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \bmod N \right\},$$

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \,\middle|\, a \equiv 1 \bmod N \right\}$$

とおく. 以上の準備の下で保型形式を定義する.

定義 **3.3** 上半平面上で正則な関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が次を満たすとき f は weight k, level N の保型形式であるという.

1. $f(\gamma z) = (cz + d)^{2k} f(z)$ for all $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$.

2. f はすべての cusp で正則. つまり, 任意の $SL_2(\mathbb{Z})$ の元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $f(\gamma z)$ は

$$f(\gamma z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,\gamma) q^{n/N} \quad (q = e^{2\pi i z})$$

という形に展開される.

さらに条件 2 において f はすべての cusp で消える, すなわち任意の $SL_2(\mathbb{Z})$ の元 γ に対して, 上の展開で $a(0,\gamma) = 0$ が成り立つとき f を cusp 形式という. このとき

$$M_k(N) := \{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \mid f \text{ は weight } k, \text{ level } N \text{ の保型形式} \},$$
$$S_k(N) := \{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \mid f \text{ は weight } k, \text{ level } N \text{ の cusp 形式} \}$$

とおくと $M_k(N)$ と $S_k(N)$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元のベクトル空間となる. また, $\Gamma_1(N)$ に関する weight k の保型形式及び cusp 形式も同様に定義し, それらのなす空間をそれぞれ $M_k(\Gamma_1(N))$, $S_k(\Gamma_1(N))$ と書くことにする.

保型形式 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n$ に対し, その L 関数を

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

によって定義する. $L(f,s)$ は整関数に解析接続できることが知られている. さらに

$$\Lambda(s) = \left(\sqrt{N}/2\pi\right)^s \Gamma(s) L(f,s)$$

とおくと

$$\Lambda(s) = \epsilon \Lambda(k-s) \quad (\epsilon = \pm 1)$$

という関数等式を満たすことが知られている. この ϵ を $L(f,s)$ の関数等式の符号と呼ぶ.

定義 3.4 ベクトル空間 $S_k(N)$ 上に内積を

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{\mu(SL_2(\mathbb{Z}))}{\mu(\Gamma_0(N))} \int_{\mathbb{H}/\Gamma_0(N)} f_1(z) \overline{f_2(z)} y^k \frac{dx\,dy}{y^2} \quad (z = x + iy)$$

により定める. ただし

$$\mu(\Gamma) = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \frac{dx\,dy}{y^2}$$

とする. この内積をPetersson 内積という.

定義 3.5 保型形式 f に対しHecke 作用素 T_pを次のように定義する.

$$T_p(f)(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} f\left(\frac{z+i}{p}\right) + p^{k-1}f(pz) & \text{if } p \nmid N, \\ \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} f\left(\frac{z+i}{p}\right) & \text{if } p \mid N. \end{cases}$$

このとき $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_k(N)$ に対し, $T_p(f)(z)$ のFourier 展開は

$$T_p(f)(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p|n} a(n)q^{n/p} + p^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^{pn} & \text{if } p \nmid N, \\ \displaystyle\sum_{p|n} a(n)q^{n/p} & \text{if } p \mid N \end{cases}$$

となる.

定義 3.6 $S_k(N)$ の部分空間 $S_k^1(N)$ を

$$\bigcup_M \bigcup_l \{f(lz) \mid f(z) \in S_k(N)\}$$

で生成される部分空間とする. ここで M は N の真の約数を動き, l は N/M の約数を動く. $S_k^{\text{new}}(N)$ をPetersson 内積に関する $S_k^1(N)$ の直交補空間として定義する. $S_k^{\text{new}}(N)$ の元をnewform という.

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_k^{\text{new}}(N)$ を正規化された (すなわち $a(1) = 1$ となっている) すべてのHecke 作用素 T_pに対する固有関数 (normalized Hecke eigen newform) とする. このとき f の L 関数 $L(f,s)$ は次のようなEuler 積をもつ;

$$L(f,s) = \prod_{p \nmid N}(1 - a(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} \prod_{p|N}(1 - a(p)p^{-s})^{-1}.$$

また, χ を Dirichlet 指標とするとき $L(f,s)$ のχ による twist を

$$L(f,\chi,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\chi(n)}{n^s}$$

によって定義する. 特に整数 D に対し $L(f,s)$ の D による quadratic twist を

$$L(f,\chi_D,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)\chi_D(n)}{n^s}$$

とする. ここで

$$\chi_D(n)=\left(\frac{D}{n}\right)$$

は Kronecker symbol とする. 次の定理は weight が 2 の場合は Shimura が示し, 一般の場合は Deligne-Serre [7] が示した.

定理 3.7 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^n\in S_k^{\mathrm{new}}(N)$ を正規化された newform とし,

$$K=\mathbb{Q}(\{a(n)|n\geq 1\})$$

とおく. さらに v を素数 l の上の K の素点とし, O_vを K の整数環の v での完備化とする. このとき連続な絶対 Galois 群の 2 次の表現

$$\rho_v:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\to GL_2(O_v)$$

があって $p\nmid Nl$ となる素数 p に対し $\mathrm{tr}\,\rho_v(\mathrm{Frob}_p)=a(p)$ を満たすようなものが存在する.

3.3 楕円曲線と保型形式のL関数の理論

E を有理数体上の楕円曲線とする. さらに E は minimal model で与えられているものとする (つまり Weierstrass 方程式の判別式の絶対値が最小になっているようなものとする). いま

$$a_p(E)=p+1-\#\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$$

とおく. ここで$\#\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$ は E の $\bmod p$ での解の個数とする (無限遠点も含めて数える). このとき楕円曲線 E の L 関数 $L(E,s)$ は

$$L(E,s)=\prod_{p\nmid\Delta}\frac{1}{1-a_p(E)p^{-s}+p^{1-2s}}\times\prod_{p|\Delta}\frac{1}{1-a_p(E)p^{-s}}$$

と定義される. Wiles 及び Breuil, Conrad, Diamond, Taylor ([35], [31], [8], [5], [2]) の結果により現在では次のことが分かっている.

定理 3.8 E を有理数体上の楕円曲線とする. このときweight 2で level N の normalized Hecke eigen newform $f_E(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ が存在して

$$L(E, s) = L(f_E, s)$$

となる.

この定理により, 特に $L(E, s)$ は $\mathbb{C}$ 上の整関数となる. L 関数と E の rank との関係は次の様に予想されている.

予想 3.9 (Birch and Swinnerton-Dyer 予想)

$$\mathrm{ord}_{s=1} L(E, s) = \mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q}).$$

ここで$\mathrm{ord}_{s=1} L(E, s)$ は $s = 1$ での零点の位数をあらわす.

この予想に関しては次の結果が有名である.

定理 3.10 (Gross-Zagier, Kolyvagin[18]) E を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とする. このとき次が成り立つ.

1. $L(E, 1) \neq 0$ ならば $\mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q}) = 0$.
2. $\mathrm{ord}_{s=1} L(E, s) = 1$ ならば $\mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q}) = 1$.

さらに楕円曲線 E の L 関数を

$$L(E, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

とするとき E_Dの L 関数は

$$L(E_D, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\chi_D(n)}{n^s}$$

となる.

3.4 楕円曲線及び保型形式に関するいくつかの予想及び結果

楕円曲線 E をひとつ決めたとき E の quadratic twist の family

$$E_D : y^2 = x^3 + aD^2x + bD^3 \quad (D \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$$

の $\mathrm{rank}\, E_D(K)$ の分布を考える. (特に $K = \mathbb{Q}$ の場合) Goldfeld はこの問題に対して次のように予想した.

予想 **3.11 (Goldfeld [10], average rank conjecture)**

$$S(X) = \{D \in \mathbb{Z} \mid |D| < X,\ D \text{ は square-free}\}$$

とおくとき

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\sum_{D\in S(X)} \operatorname{rank} E_D(\mathbb{Q})}{\#S(X)} = \frac{1}{2}.$$

この予想は現在では Birch and Swinnerton-Dyer 予想と関数等式の符号の関する考察をあわせることにより, より精密に次のように予想されている.

予想 **3.12 (density conjecture)** $\delta = 0, 1$ に対し

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\#\{D \in S(X) \mid \operatorname{rank} E_D(\mathbb{Q}) = \delta\}}{\#S(X)} = \frac{1}{2}.$$

この予想は rank が 0 のものと 1 のものが密度としては半分ずつでてきて, それ以外は密度としては 0 になってしまうということを意味している. density conjecture からは average rank conjecture が従うことが容易にわかる. Birch and Swinnerton-Dyer 予想の仮定の下で density conjecture は次の予想と同値になる.

予想 **3.13** (L 関数に対する **density conjecture**) $\delta = 0, 1$ に対し

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\#\{D \in S(X) \mid \operatorname{ord}_{s=1} L(E_D, s) = \delta\}}{\#S(X)} = \frac{1}{2}.$$

この事実から density conjecture は次の様に一般化される.

予想 **3.14 (一般化された density conjecture)** $f(z)$ を weight $2k$, level N の normalized Hecke eigen newform とする. このとき$\delta = 0, 1$ に対し

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\#\{D \in S(X) \mid \operatorname{ord}_{s=k} L(f, \chi_D, s) = \delta\}}{\#S(X)} = \frac{1}{2}.$$

簡単のために次の記号を準備する.

定義 **3.15** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対してある $C > 0$, $X_0 > 0$ があって任意の $X \geq X_0$に対して $f(X) \geq Cg(X)$ となるとき $f(X) \gg g(X)$ と書く.

また一般化された density conjecture の弱い形の予想として

予想 **3.16 (density conjecture の弱い形)** $\delta = 0, 1$ に対し

$$\#\{D \in S(X) \mid \mathrm{ord}_{s=k} L(f, \chi_D, s) = \delta\} \gg X.$$

これらの予想に対しての初めて得られた一般的な結果は次のものである.

定理 **3.17 (K.Murty-R.Murty [19], 1990)** $\delta = 0, 1$ に対し

$$\#\{D \in S(X) \mid \mathrm{ord}_{s=k} L(f, \chi_D, s) = \delta\} = +\infty.$$

現在知られている最もよい結果は次のものである.

定理 **3.18 (Ono-Skinner [23], 1998)**

$$\#\{D \in S(X) \mid L(f, \chi_D, k) \neq 0\} \gg \frac{X}{\log X}.$$

この結果は以降の節で説明する Waldspurger の結果と半整数 weight の保型形式の Fourier 係数の non-vanishing を調べることにより示された. さらには楕円曲線に限れば

定理 **3.19 (Perelli-Pomykala [24], 1997)** 任意の$\epsilon > 0$ に対し

$$\#\{D \in S(X) \mid \mathrm{ord}_{s=1} L(E_D, s) = 1\} \gg X^{1-\epsilon}$$

が知られている.

James, Vatsal, Kohnen らの結果により具体的に楕円曲線や保型形式を与えたときには実際に密度が正になることが知られている例もある. (例えば $E = X_0(19)$) 以上の予想のさらなる一般化として次の予想が容易に考えられる.

予想 **3.20** $N_1, \ldots, N_r$を互いに素な r 個の正の整数とする.

$$f_1(z) \in S_{2k_1}(N_1), \ldots, f_r(z) \in S_{2k_r}(N_r)$$

という r 個の normalized Hecke eigen newforms に対して

$$\lim_{X \to \infty} \frac{\sum_{D \in S(X)} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{ord}_{s=k_i} L(f_i, \chi_D, k_i)}{\#S(X)} = \frac{r}{2}.$$

この予想から従う簡単な問題として,

問題 **3.21**

$$f_1(z) \in S_{2k_1}(N_1), \ldots, f_r(z) \in S_{2k_r}(N_r)$$

という異なる r 個のnewform に対して $L(f_1, \chi_D, k_1) \cdots L(f_r, \chi_D, k_r) \neq 0$ となる D は無限に存在するか? または素数に限った場合はどうか?

ということが考えられる. 以後この問題に対して特に考察していく.

4　半整数 weight の保型形式

この節では半整数 weight の保型形式の基本的な事項について復習していく.

4.1　半整数 weight の保型形式の定義

まずはじめに複素数 z に対して$\sqrt{z}$は$-\pi/2 < \arg\sqrt{z} \leqq \pi/2$ をとるとし $z^{k/2} = (\sqrt{z})^k$と定義する.

定義 4.1

$$PGL_2(\mathbb{R}) := \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$$

とおき, $PGL_2(\mathbb{R})$ の被覆群 $G = G(k+1/2)$ を

$$G = \left\{ (\alpha, \phi(z)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \in PGL_2(\mathbb{R}),\ \phi : \mathbb{H} \text{ 上の正則関数で } t \in \mathbb{C},\ |t| = 1 \\ \text{があって} \phi(z) = t \cdot (\det \alpha)^{-k/2-1/4}(cz+d)^{k+1/2} \end{array} \right\}$$

と定める. ここで

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とした. ただし群の演算は $(\alpha, \phi) \cdot (\beta, \psi) := (\alpha\beta, \phi(\beta z)\psi(z))$ によって定める. さらに $\mathbb{H}$ 上の複素数値関数 f に対して$\xi = (\alpha, \phi) \in G$ の作用を

$$f|\xi = \phi(z)^{-1} f(\alpha z)$$

と定める.

次に合同部分群 $\Gamma_0(N)$ の G への持ち上げを考える. まず

$$\theta(z) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2}$$

とおき $\gamma \in PGL_2(\mathbb{R})$ に対し $j(\gamma, z) = \theta(\gamma z)/\theta(z)$ とおく.

定義 4.2 N を正の整数で 4 の倍数とし χ を $\bmod N$ の Dirichlet 指標とする. このとき G の部分群 $\Delta_1(N)$ 及び $\Delta_0(N, \chi)$ を

$$\Delta_1(N) := \left\{ (\gamma, j(\gamma, z)^{2k+1}) \;\middle|\; \gamma \in \Gamma_1(N) \right\},$$

$$\Delta_0(N, \chi) := \left\{ (\gamma, \chi(d) j(\gamma, z)^{2k+1}) \;\middle|\; \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}$$

と定める.

定義 4.3 N を正の整数で, 4 の倍数とする. 上半平面上で正則な関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が次を満たすとき f はweight $k+1/2$, level N, 指標 χ を持つ保型形式であるという.

1. $f|\xi = f(z)$ for all $\xi \in \Delta_0(N, \chi)$.
2. f はすべての cusp で正則.

さらに条件 2 において f はすべての cusp で消えるとき f を cusp 形式という. さらに weight $k+1/2$, level N, 指標 χ を持つ保型形式のなす空間を $M_{k+1/2}(N, \chi)$ と書き, weight $k+1/2$, level N, 指標 χ を持つ cusp 形式のなす空間を $S_{k+1/2}(N, \chi)$ と書くことにする. 整数 weight の場合と同じく $M_{k+1/2}(N, \chi)$ と $S_{k+1/2}(N, \chi)$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元のベクトル空間となる. また, $\Delta_1(N)$ に関する weight $k+1/2$ の保型形式及び cusp 形式も同様に定義し, それらのなす空間をそれぞれ $M_{k+1/2}(\Gamma_1(N))$, $S_{k+1/2}(\Gamma_1(N))$ と書くことにする.

半整数 weight の保型形式

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \in M_{k+1/2}(N, \chi)$$

に対してはHecke 作用素 T_{p^2}は

$$T_{p^2}(g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) q^n$$

と作用する. ここで $b(n)$ は

$$b(n) = a(p^2 n) + \chi(p) \left(\frac{-1}{p}\right)^k \left(\frac{n}{p}\right) p^{k-1} a(n) + \chi(p^2) p^{2k-1} a(n/p^2).$$

ただし $a(n/p^2)$ は $p^2 \nmid n$ のときは 0 とする.

4.2 志村対応

N を 4 の倍数とし, χ を $\bmod N$ の conductor が r の指標とする. このとき

$$\left\{ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) n q^{tm^2} \;\middle|\; N = 4r^2 t,\ \chi = \psi \chi_{-t} \right\}$$

で生成される $S_{3/2}(N,\chi)$ の部分空間を $S^0_{3/2}(N,\chi)$ とおき, その直交補空間を $S'_{3/2}(N,\chi)$ とおく.

$k \geq 2$ のとき

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n \in S_{k+1/2}(N,\chi)$$

とし, $k=1$ のとき

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n \in S'_{3/2}(N,\chi)$$

とする. さらに $g(z)$ は $p \nmid N$ となるすべての Hecke 作用素 T_{p^2}の固有関数とし, t を square-free な正の整数とする. いま $A_t(n)$ を形式的な Dirichlet 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_t(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)(\frac{-1}{n})^k \left(\frac{t}{n}\right)}{n^{s-k+1}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(tn^2)}{n^s}\right)$$

によって定める. このとき Shimura [25] ($k=1$ のときは Cipra による) はある正の整数 M が存在し

$$\mathrm{SH}_t(g(z)) = f_t(z) := \sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)q^n \in S_{2k}(M,\chi^2)$$

となることを示した (実際は $M = N/2$ ととれることが示されている). しかも t が異なっていても$\mathrm{SH}_t(g)$ は定数倍しか違いがないため本質的にはこの対応は t には依らない. この保型形式の対応を志村対応と呼ぶ. Waldspurger [34] は半整数 weight の保型形式の Fourier 係数と L 関数の twist の特殊値とを結びつける次のような関係を証明した.

定理 4.4 (Waldspurger [34], Corollary 2)

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n \in S_{k+1/2}(N,\chi_d)$$

を $p \nmid N$ となるすべての Hecke 作用素 T_{p^2}の固有関数とし, ある正の整数 M に対して$\mathrm{SH}_t(g(z)) = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S^{\mathrm{new}}_{2k}(N)$ となると仮定する. また n_1と n_2は正の square-free な整数で $p \mid N$ となるすべての素数 p に対し $n_1/n_2 \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$を満たすとする. このとき

$$b(n_1)^2 L(f,\chi_{(-1)^k dn_2},k){n_2}^{k-1/2} = b(n_2)^2 L(f,\chi_{(-1)^k dn_1},k){n_1}^{k-1/2}$$

となる.

この定理によって保型 L 関数の non-vanishing を調べるためには対応する半整数 weight の保型形式の Fourier 係数の non-vanishing を調べればよいということがわかる.

5 保型L関数の non-vanishing

この節では半整数 weight の保型形式の Fourier 係数の non-vanishing を調べ, Waldspurger の定理をつかって保型 L 関数の non-vanishing に関する主定理の証明を述べる.

5.1 Fourier 係数の non-vanishing

以降, 半整数 weight の保型形式の Fourier 係数はすべて, ある代数体 K の整数環に含まれるとする. さらに v を K の 2 の上の素点とし, e を v の 2 の上の分岐指数とする.

定義 **5.1** r を正の整数とする. このとき

$$
\begin{aligned}
S(X) &= \{D \in \mathbb{Z} \mid |D| < X,\ D \text{ は square-free}\},\\
P_r &= \left\{ D \in \mathbb{Z} \;\middle|\; D \text{ は square-free な正の整数で } r \text{ 個の素因子を持つ} \right\},\\
P(X) &= \left\{ p \;\middle|\; p \text{ は素数で } p < X \right\},\\
P_r(X) &= \left\{ D \in P_r \;\middle|\; D < X \right\}
\end{aligned}
$$

とおく.

次の補題は Ono-Skinner の結果の一般化である..

補題 **5.2** $i = 1 \ldots, r$ に対し,

$$g_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_i(n) q^n \in S_{k_i+1/2}(\Gamma_1(N_i))$$

を 0 でない 半整数 weight の保型形式とする. いま $N = N_1 \cdots N_r$とし,

$$s_i = \min\{ \operatorname{ord}_v(b_i(m)) \mid m \text{ は正の整数} \}.$$

とおく. さらに square-free な整数 $m_0 (m_0 = p_1 \cdots p_l \in P_l)$ があって $s_i = \operatorname{ord}_v(b_i(m_0))$ 及び $(m_0, N) = 1$ を満たすと仮定する. このとき, 有理数

体 $\mathbb{Q}$ の有限次 Galois 拡大 k が存在して次を満たす: square-free な整数 $m\,(m = q_1 \cdots q_l \in P_l)$ が $j = 1, \ldots, l$ に対し $\mathrm{Frob}_{q_j}(k/\mathbb{Q}) = \mathrm{Frob}_{p_j}(k/\mathbb{Q})$ であれば, すべての i について$\mathrm{ord}_v(b_i(m)) = s_i$となる.

証明 まず,

$$G_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_i(n) q^n = g_i(z) \times \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)$$

とおく. このとき G_iは $S_{k_i+1}(\Gamma_1(N_i))$ の元となる. また

$$c_i(n) = b_i(n) + 2 \sum_{m+y^2=n, y>0} b_i(m)$$

であることから$\mathrm{ord}_v(c_i(m_0)) = \mathrm{ord}_v(b_i(m_0))$ となる. newform の定義より, $G_i(z)$ は

$$G_i(z) = \sum_{u=1}^{a} \alpha_{i,u} f_{i,u}(z) + \sum_{v=1}^{b} \beta_{i,v} h_v(l_{i,v} z)$$

と書けることがわかる. ここで $f_{i,u}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,u}(n) q^n$及び $h_{i,v}(z)$ は weight $k_i + 1$ で level が N_iの約数となるような newform であり, $l_{i,v}$は N_i の真の約数. このことより $(n, N_i) = 1$ ならば

$$c_i(n) = \sum_{u=1}^{a} \alpha_{i,u} a_{i,u}(n)$$

となることがわかる. このとき L を K, 各 $f_{i,u}$の Fourier 係数及び$\alpha_{i,u}$を含む有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とする. また w を L の v の上の素点とし, e を w の v 上の分岐指数とする. さらに O_wを L の整数環の w での完備化とし, λをその唯一の素 ideal の生成元とする. 最後に

$$E_i = \max_{1 \le u \le a} |\mathrm{ord}_w(\alpha_{i,u})|$$

とおく. このとき定理 3.7 より絶対 Galois 群の 2 次の表現

$$\rho_{i,u} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(O_w)$$

があって $\mathrm{tr}\,\rho_{i,u}(\mathrm{Frob}_p) = a_{i,u}(p)$ を満たすようなものが存在する. いま,

$$\rho_i = \bigoplus_{u=1}^{a} \rho_{i,u} \bmod \lambda^{E_i + e s_i + 1}$$

とおけば, 像は有限になるので, ある $\mathbb{Q}$ の有限次 Galois 拡大体 k_iがあって, ρ_iの k_iへの制限は同型になる. ゆえに $\mathrm{Frob}_{q_t}(k_i/\mathbb{Q}) = \mathrm{Frob}_{p_t}(k_i/\mathbb{Q})$ となる素数 q_tに対して $a_{i,u}(q_t) \equiv a_{i,u}(p_t) \bmod \lambda^{E_i+es_i+1}(\ u = 1, \ldots, a)$ となる. よって newform の Fourier 係数の乗法性より, $m = q_1 \cdots q_l$に対して $a_{i,u}(m) \equiv a_{i,u}(m_0) \bmod \lambda^{E_i+es_i+1}$が成り立つ. このことを使うことにより $c_i(m) \equiv c_i(m_0) \bmod \lambda^{es_i+1}$となるから$\mathrm{ord}_w(c_i(m)) = \mathrm{ord}_w(c_i(m_0)) = es_i$ となることがわかる. 以上から$\mathrm{ord}_v(b_i(m)) = \mathrm{ord}_v(b_i(m_0)) = s_i$であり, また

$$\mathrm{Frob}_p(k_1 \ldots k_r/\mathbb{Q})|_{k_i} = \mathrm{Frob}_p(k_i/\mathbb{Q}),$$

であるから $k = k_1 \ldots k_r$とおけばよい. □

補題 **5.3** $L_1, \ldots, L_r$を有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次 Galois 拡大, A_iを$\mathrm{Gal}(L_i/\mathbb{Q})$ の共役類とする. いま p_0を各 $i = 1, \ldots, r$ に対し $\mathrm{Frob}_{p_0}(L_i/\mathbb{Q}) = A_i$ を満たすような素数とするとき,

$$\{\, p \in P(X) \mid \mathrm{Frob}_p(L_i/\mathbb{Q}) = A_i \text{ for } i = 1, \ldots, r \,\} \gg \frac{X}{\log X}$$

が成り立つ.

証明 $L = L_1 \cdots L_r$とおくと$\mathrm{Frob}_p(L/\mathbb{Q})|_{L_i} = \mathrm{Frob}_p(L_i/\mathbb{Q})$ となるので, $\mathrm{Frob}_p(L/\mathbb{Q}) = \mathrm{Frob}_{p_0}(L/\mathbb{Q})$ ならば $\mathrm{Frob}_p(L_i/\mathbb{Q}) = A_i$となることがわかる. よって Chebotarev の密度定理によって, 各 $i = 1, \ldots, r$ に対し $\mathrm{Frob}_p(L_i/\mathbb{Q}) = A_i$ となる素数 p の密度は正になることがわかる. □

補題 **5.4** r, a, t を正の整数とし, $i = 1, \ldots, r$ に対して

$$g_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_i(n) q^n \in S_{k_i+1/2}(N_i, \chi_i)$$

を Hecke 作用素の固有関数とし,

$$s_i = \min\{\, \mathrm{ord}_v(b_i(n)) \mid n \text{ は正の整数} \,\}$$

とおく. いま square-free な整数 $m_0 (m_0 = p_1 \cdots p_l)$ があって, すべての i について $m_0 \equiv a \bmod t$, $(m_0, N_1 \cdots N_r) = 1$, $\mathrm{ord}_v(b_i(m_0)) = s_i < +\infty$ を満たすと仮定する. このとき

$$\{\, m \in P_l(X) \mid \mathrm{ord}_v(b_i(m)) = s_i \ (i = 1, \ldots, r),\ m \equiv a \bmod t \,\} \gg \frac{X}{\log X}$$

が成立する. 特に

$$\{\, m \in P_l(X) \mid b_i(m) \neq 0 \ (i = 1, \ldots, r),\, m \equiv a \bmod t \,\} \gg \frac{X}{\log X}$$

証明 g_iに対して補題 5.2 を使えば, ある $\mathbb{Q}$ の有限次 Galois 拡大体 k_1があって, $\mathrm{Frob}_{q_j}(k_1/\mathbb{Q}) = \mathrm{Frob}_{p_j}(k_1/\mathbb{Q})\,(j = 1, \ldots, l)$ となる square-free な整数 m $(m = q_1 \cdots q_l)$ に対し, 任意の i について $\mathrm{ord}_v(b_i(m)) = s_i$となる. いま $k_2 = \mathbb{Q}(\zeta_t)\,(\zeta_t = \exp(2\pi i/t))$ とおくと, $\mathrm{Frob}_{q_j}(k_2/\mathbb{Q}) = \mathrm{Frob}_{p_j}(k_2/\mathbb{Q})$ $(j = 1, \ldots, l)$ ならば, $m \equiv m_0 \bmod t$ となることがわかる. よってこの補題は補題 5.3 より従う. □

主定理を示すためにさらに次の補題を引用しておく.

補題 **5.5 (Shimura [25], Lemma 3.6)**

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) q^n \in S_{k+1/2}(N, \chi)$$

を半整数 weight の保型形式とし ψを $\bmod r$ の primitive な指標とする. また s をχの conductor とし, M を N, r^2及び rs の最大公倍数とする. いま

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) b(n) q^n.$$

とおけば $g'(z)$ は $S_{k+1/2}(M, \psi^2\chi)$ の元となる.

5.2 保型L関数の non-vanishing

$$g_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_i(n) q^n \in S_{k_i+1/2}(M_i, 1)$$

を $p \nmid M_i$となるすべての素数 p に対する Hecke 作用素 T_{p^2} の固有関数で志村対応での像が

$$f_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i(n) q^n \in S_{2k_i}^{\mathrm{new}}(N_i, 1)$$

になるようなものとする. さらにすべての Fourier 係数 $b_i(m)$ はある代数体 K の整数であるとしする. また v を 2 の上の素点とし,

$$s_i = \min\{\, \mathrm{ord}_v(b_i(m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, M_1 \cdots M_r) = 1 \,\}$$

とおく. このとき主定理は次のように述べられる.

定理 5.6 $s_i < +\infty$ でありかつ, $M = M_1 \cdots M_r$と素な square-free な整数 $m_0 = p_1 \cdots p_l$ (p_iは素数) があって $i = 1, \ldots, r$ に対して

$$\mathrm{ord}_v(b_i(m_0)) = s_i,\ L(f_i, \chi_{(-1)^{k_i} m_0}, k_i) \neq 0$$

を満たすならば,

$$\#\left\{ m \in P_l(X) \;\middle|\; \prod_{i=1}^{r} L(f_i, \chi_{(-1)^{k_i} m}, k_i) \neq 0 \right\} \gg \frac{X}{\log X}$$

が成り立つ.

証明 まず $\left(\dfrac{m_0}{p}\right) = -1$ となる素数 p をひとつ選ぶ. いま $t = 8 \prod_{q|M} q$ (q は M の奇な素因子を動く) とし

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } \left(\dfrac{n}{p}\right) = -1, \quad (n, M) = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと補題 5.5, より

$$g_i{}'(z) = \sum_{n \equiv r \bmod t} \delta(n) b(n) q^n \in S_{k+1/2}(\Gamma_1(N_i p^2 t^2))$$

となる. よって補題 5.4 より

$$\#\left\{ m \in P_l(X) \;\middle|\; \prod_{i=1}^{r} \delta(m) b_i(m) \neq 0,\ m \equiv m_0 \bmod t \right\} \gg \frac{X}{\log X}.$$

ここで定理 4.4 より square-free な正の整数 n に対し $\delta(n)b(n) \neq 0$ なら $L(f_i, \chi_{(-1)^{k_i} m}, k_i) \neq 0$ となるので,

$$\#\left\{ m \in P_l(X) \;\middle|\; \prod_{i=1}^{r} L(f_i, \chi_{(-1)^{k_i} m}, k_i) \neq 0 \right\} \gg \frac{X}{\log X}$$

が分かる. □

この結果を楕円曲線の理論に応用するため次の補題を引用しておく.

補題 5.7 (Shimura [25], Section 1)

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n \in S_{k+1/2}(N, \chi)$$

を半整数 weight の保型形式とし p を素数とする. このとき

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(pn)q^n \in S_{k+1/2}(pN, \chi_{4p} \cdot \chi)$$

となる.

系 5.8 a, t を正の整数とし

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_1(n)q^n \in S_{k+1/2}(N, \chi)$$

を Hecke 作用素 T_{p^2}の固有関数とする. いま square-free な正の整数 l を $(l, M) = 1$ を満たすものとし, $b_2(n) = b_1(nl)$ とおく. さらに

$$s_1 = \min\{\, \mathrm{ord}_v(b(n)) \mid n > 1 \text{ は square-free で } (n, N) = 1 \,\}$$

及び

$$s_2 = \min\{\, \mathrm{ord}_v(b(ln)) \mid n > 1 \text{ は square-free で } (n, lN) = 1 \,\}$$

とおく. いま square-free な正の整数 m_0 $(m_0 = p_1 \cdots p_r)$ があって $m_0 \equiv a \bmod t$, $(m_0, lN) = 1$ 及び $\mathrm{ord}_v(b_1(m_0)) = s_1$, $\mathrm{ord}_v(b_2(m_0)) = s_2$を満たすとする. このとき

$$\#\{\, m \in P_r(X) \mid \mathrm{ord}_v(b_i(m)) = s_i \ (i = 1, 2),\ m \equiv a \bmod t \,\} \gg \frac{X}{\log X}$$

が成り立つ.

証明 いま

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b'(n)q^n = \sum_{n=1}^{\infty} b(ln)q^n$$

とおくと補題 5.7 より, $g'(z) \in S_{k+1/2}(\Gamma_1(l^2N^2))$ が分かる. $g'(z)$ は必ずしも Hecke 作用素の固有関数にはならないが $g(z)$ が固有関数であることから $\mathrm{ord}_v(b'(n)) \leq \mathrm{ord}_v(b'(nm^2))$ となる. ゆえに定理 5.6 と同様にしてこの系が成り立つことが分かる. □

6　応用

6.1　楕円曲線への応用

E を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし, その L 関数を

$$L(E,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$$

とする. $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b(n)q^n\in S_{3/2}(M,1)$ を $p\nmid M$ となるすべての素数 p に対する Hecke 作用素 T_{p^2} の固有関数で

$$\mathrm{SH}_t(g(z))=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^n$$

を満たすと仮定する. さらに全ての $b(m)$ はある有限次代数体 K の整数環に含まれるとする. l を square-free な正の整数で $(l,M)=1$ とし, v を K の 2 の上の素点とする. このとき

$$s_1=\min\{\,\mathrm{ord}_v(b(m))\mid m>1 \text{ は square-free で } (m,M)=1\,\}$$

及び

$$s_2=\min\{\,\mathrm{ord}_v(b(lm))\mid m>1 \text{ は square-free で } (m,lM)=1\,\}$$

とおく.

定理 6.1 $s<+\infty$, $s'<+\infty$ とし, ある正の整数 m_0 $(m_0=p_1\cdots p_r)$ があって $(m_0,lM)=1$ 及び $\mathrm{ord}_v(b(m_0))=s_1$, $\mathrm{ord}_v(b(lm_0))=s_2$ を満たすとする. さらに $L(E_{-m_0},1)\neq 0$, $L(E_{-lm_0},1)\neq 0$ であるとする. このとき $\mathrm{rank}\,E_{-m}(\mathbb{Q}(\sqrt{l}))=0$ となる m が無限に存在し, さらに

$$\#\{\,m\in P_r(X)\mid \mathrm{rank}\,E_{-m}(\mathbb{Q}(\sqrt{l}))=0\,\}\gg\frac{X}{\log X}$$

が成り立つ.

証明　$t=8\prod_{q|M}q$ とおく. square-free な正の整数 m_1 が $m_1\equiv m_0 \bmod t$ を満たせば, 任意の $p\nmid M$ となる素数 p に対して $m_1/m_0\in\mathbb{Q}_p^{\times\,2}$ が成り立つ. 仮定により, $\mathrm{ord}_v(b(m_0))=s_1$ 及び $\mathrm{ord}_v(b(lm_0))=s_2$ であるから系 5.8 により $b(m)\neq 0$, $b(lm)\neq 0$ 及び $m\equiv m_0 \bmod t$ となる正の整数 m が

無限に存在する. このとき定理 4.4 より $L(E_{-m},1)\neq 0$, $L(E_{-lm},1)\neq 0$ となる正の整数 m が無限に存在することが分かる. 故に定理 3.10 によりこのような m に対し $\operatorname{rank} E_{-m}(\mathbb{Q})=\operatorname{rank} E_{-lm}(\mathbb{Q})=0$. このとき

$$\operatorname{rank} E_{-m}(\mathbb{Q}(\sqrt{l}))=\operatorname{rank} E_{-m}(\mathbb{Q})+\operatorname{rank} E_{-ml}(\mathbb{Q})=0$$

であるから $\operatorname{rank} E_{-m}(\mathbb{Q}(\sqrt{l}))=0$ となる整数 m が無限に存在することが示された. □

E を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線, $k=\mathbb{Q}(\sqrt{l})$ を 2 次体とするとき E/k の L 関数は

$$L(E,k,s)=L(E,s)L(E_l,s)$$

と書けることが知られている. このことより次が分かる.

系 6.2 square-free な整数 m_0 があって $(m_0,lM)=1$ かつ $\operatorname{ord}_v(b(m_0))=s_1<+\infty$ 及び $\operatorname{ord}_v(b(lm_0))=s_2<+\infty$ を満たすと仮定する. このとき

$$\operatorname{ord}_v\left(\frac{L(E_{-m},\mathbb{Q}(\sqrt{l}),1)}{\Omega(E_{-m},\mathbb{Q}(\sqrt{l}))}\right)=\operatorname{ord}_v\left(\frac{L(E_{-m_0},\mathbb{Q}(\sqrt{l}),1)}{\Omega(E_{-m_0},\mathbb{Q}(\sqrt{l}))}\right)$$

となる整数 m が無限に存在する. ただし $\Omega(E,k)$ は E/k の実周期を表す.

証明 定理 4.4 及び定理 6.1 より明らか. □

Coogan と Jiménez-Urroz[6] は次の定理を証明した.

定理 6.3 ([6], Theorem 3) E^1 及び E^2 を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で $\mathbb{Q}$ 上の自明でない 2-等分点を持たないものとする. このとき, ある整数 D_1, D_2 と正の密度を持つ素数の集合 T が存在して, 任意の $d=p_1p_2\cdots p_{2n}$, $p_i\in T$ に対し

$$\operatorname{rank} E^1_{dD_1}(\mathbb{Q})=\operatorname{rank} E^2_{dD_2}(\mathbb{Q})=0.$$

この定理と同様な状況をより一般の場合について考えれば次のようなことが分かる.

定理 6.4 $i=1,\ldots,r$ に対し, E^i を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし, これらの L 関数を

$$L(E^i,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_i(n)}{n^s}$$

とし

$$g_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_i(n) q^n \in S_{3/2}(M_i, 1)$$

を $p \nmid M_i$ となる全ての素数 p に対する Hecke 作用素 T_{p^2} の固有関数で $g_i(z)$ の志村対応での像は $f_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i(n) q^n$ となるものとする．$b_i(m)$ はある代数体 K の整数環に含まれるとし，v を K の 2 の上の素点とする．さらに

$$s_i = \min\{\, \mathrm{ord}_v(b_i(m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, M_1 \cdots M_r) = 1 \,\}$$

とおく．このとき，ある square-free な整数 m_0 で $(m_0, M_1 \cdots M_r) = 1$ となるものがあって任意の $i = 1, \ldots, r$ に対し

$$\mathrm{ord}_v(b_i(m_0)) = s_i < +\infty,\ L(E^i_{-m_0}, 1) \neq 0$$

を満たすとすれば $\mathrm{rank}\, E^1_{-m}(\mathbb{Q}) = \cdots = \mathrm{rank}\, E^r_{-m}(\mathbb{Q}) = 0$ となる square-free な整数 m が無限に存在し，さらに

$$\{\, m \in P_l(X) \mid \mathrm{rank}\, E^i_{-m}(\mathbb{Q}) = 0 \ (i = 1, \ldots, r) \,\} \gg \frac{X}{\log X}$$

である．

証明 定理 1.5 及び定理 3.10 より従う．□

6.2 楕円曲線の場合の例

例 **6.5** E を

$$E : y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20$$

で与えられる楕円曲線とする．E の conductor は 11 であり，E は modular curve $X_0(11)$ に等しい．この場合対応する weight $3/2$ の保型形式は

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{x,y,z \in \mathbb{Z}} q^{x^2+11y^2+11z^2} - q^{3x^2+2xy+4y^2+11z^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) q^n \\ &= q - q^3 - q^5 + q^{11} + 2q^{12} - 2q^{14} + q^{15} - \cdots \end{aligned}$$

であり g は $S_{3/2}(44, 1)$ の元である．さらに志村対応での像 $\mathrm{SH}_1(g(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n$ は weight が 2 の newform でその Mellin 変換は $L(E, s)$ となる．上の級数展開の表示から

$$\mathrm{ord}_2(b(3)) = 0,\ \mathrm{ord}_2(b(5)) = 0, \mathrm{ord}_2(b(15)) = 0$$

であり,

$$\min\{\,\mathrm{ord}_v(b(m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, 44) = 1\ \} = 0.$$

さらに

$$L(E_{-3}, 1) \neq 0,\ L(E_{-5}, 1) \neq 0,\ \mathrm{ord}_2(L(E_{-15}, 1)/\Omega(E_{-15}, \mathbb{Q})) = 0$$

が知られているので定理 6.1 より, $l = 3, 5$ に対して $\mathrm{rank}\, E_{-p}(\mathbb{Q}(\sqrt{l})) = 0$ となる素数 p が無限に (しかも正の密度で) 存在することが分かる.

$s \geq \mathrm{ord}_v 2$ となる場合,

$$s = \min\{\,\mathrm{ord}_v(b(m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, lM) = 1\ \}$$

を決定するために次の定理を使う.

定理 6.6 (Sturm [28], Theorem 1)

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) q^n \in M_k(N, \chi)$$

を半整数または整数 weight の保型形式で $b(m)$ はある代数体 K の整数環に含まれるとする. v を K の有限素点とし

$$\lambda = \frac{k}{12}[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)] + 1 = \frac{kN}{12} \prod_{p|N} \frac{p+1}{p} + 1$$

とおく. このとき $b(n) \equiv 0 \bmod v$ for $n = 1, \ldots, \lambda$. ならば全ての n に対し $b(n) \equiv 0 \bmod v$ となる.

注 6.7 (cf. [14], Proposition 5) [28] において, Sturm は整数 weight で trivial な指標の場合にのみ証明しているが, 一般の場合は適当な f の冪をとることによりこの特別な場合に帰着される.

例 6.8 (cf. [1], Examples 3.6.2) E を

$$E : y^2 + xy + y = x^3 + 4x - 6$$

により与えられる楕円曲線とする. この場合 E の conductor は 14 であり, E は modular curve $X_0(14)$ に等しい. さらに E は $\mathbb{Q}$ 上の自明でない 2-等分点を持つ. このとき対応する weight $3/2$ の保型形式は

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{x,y,z\in\mathbb{Z}} q^{x^2+14y^2+14z^2} - q^{2x^2+7y^2+14z^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n \\ &= q - q^2 + q^4 - q^7 - q^8 - q^9 + \cdots \end{aligned}$$

であり, g は $S_{3/2}(56,1)$ の元となる. また, 志村対応での像 $\mathrm{SH}_1(g(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ は weight 2 の newform でその Mellin 変換は $L(E,s)$ となる. いま,

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } (n,56) = 1\ , \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

及び

$$\delta'(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } (n,88200) = 1\ , \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく.

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_1(n)q^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\delta(n)q^n - \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta(n)q^{n^2}\right) \end{aligned}$$

とすれば, 補題 5.5, 5.7 により $g_1(z)\in M_{3/b2}(504,\chi_1)$ 及び

$$\begin{aligned} g_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_2(n)q^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b(15n)\delta'(n)q^n - 2\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta'(n)q^{n^2}\right) \end{aligned}$$

とするとき $g_2(z) \in M_{3/2}(88200,\chi_2)$ となる. このとき, $\lambda_1 = 145$, $\lambda_2 = 30241$ とおくと $n = 1,\ldots,\lambda_1$ に対し $b_1(n) \equiv 0 \bmod 2$ が分かり, さらに $n = 1,\ldots,\lambda_2$ に対し $b_2(n) \equiv 0 \bmod 4$ となることも分かる. よって定理 6.6 より,

$$\min\{\, \mathrm{ord}_2(b(m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m,56) = 1 \ \} = 1$$

及び

$$\min\{\ \mathrm{ord}_2(b(15m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, 88200) = 1\ \} = 2$$

となる. また $\mathrm{ord}_2(b(71)) = 1, \mathrm{ord}_2(b(71 \cdot 15)) = 2, L(E_{-71}, 1) \neq 0$ 及び $L(E_{-71\cdot 15}, 1) \neq 0$ であるから定理 6.1 より, $\mathrm{rank}\, E_{-p}(\mathbb{Q}(\sqrt{15})) = 0$ となる素数 p が無限に存在することが分かる.

例 6.9 (cf. [1], Examples 3.6.6) E を

$$E : y^2 = x^3 + x^2 + 4x + 4$$

で与えられる楕円曲線とする. このとき E の conductor は 20 であり, E は $\mathbb{Q}$ 上に自明でない 2-等分点を持つ. このとき対応する weight $3/2$ の保型形式は

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{x,y,z\in\mathbb{Z}} q^{x^2+20y^2+20z^2} - q^{4x^2+5y^2+20z^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n \\ &= q - q^5 - q^9 + 2q^{21} - q^{25} - 2q^{41} + \cdots \end{aligned}$$

であり, g は $S_{3/2}(80, 1)$ の元となる. また, 志村対応での像 $\mathrm{SH}_1(g(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ は weight 2 の newform でその Mellin 変換は $L(E, s)$ となる. このとき

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } (n, 80) = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

及び

$$\delta'(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } (n, 210) = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく.

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_1(n)q^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\delta(n)q^n - \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta(n)q^{n^2}\right) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} g_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_2(n) q^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b(21n)\delta'(n) q^n - 2\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta'(n) q^{n^2}\right) \end{aligned}$$

とすると補題 $5.5,\ 5.7$ により $g_1(z) \in M_{3/2}(360, \chi_1),\ g_2 \in M_{3/2}(176400, \chi_2)$ となることが分かる. このとき $\lambda_1 = 144$ 及び $\lambda_2 = 60481$ とおけば, $n = 1, \ldots, \lambda_1$ に対し $b_1(n) \equiv 0 \bmod 2$, $n = 1, \ldots, \lambda_2$ に対し $b_2(n) \equiv 0 \bmod 4$ となることも分かる. よって定理 6.6 より,

$$\min\{\, \mathrm{ord}_2(b(m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, 360) = 1 \,\} = 1$$

及び

$$\min\{\, \mathrm{ord}_2(b(21m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, 60480) = 1 \ \} = 2$$

となる. さらに $\mathrm{ord}_2(b(41)) = 1$, $\mathrm{ord}_2(b(41 \cdot 21)) = 2$, $L(E_{-41}, 1) \neq 0$ 及び $L(E_{-41 \cdot 21}, 1) \neq 0$ であるから, 定理 6.1 より $\mathrm{rank}\, E_{-p}(\mathbb{Q}(\sqrt{21})) = 0$ となる素数 p が無限に存在することが分かる.

例 6.10 E^1 を楕円曲線 $X_0(11)$ とし, E^2 を楕円曲線 $X_0(14)$ とする. この場合対応する weight $3/2$ の保型形式はそれぞれ

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{x,y,z \in \mathbb{Z}} q^{x^2+11y^2+11z^2} - q^{3x^2+2xy+4y^2+11z^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_1(n) q^n \\ &= q - q^3 - q^5 + q^{11} + 2q^{12} - 2q^{14} + q^{15} - \cdots, \\ g_2(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{x,y,z \in \mathbb{Z}} q^{x^2+14y^2+14z^2} - q^{2x^2+7y^2+14z^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_2(n) q^n \\ &= q - q^2 + q^4 - q^7 - q^8 - q^9 + \cdots \end{aligned}$$

であり,

$$\min\{\, \mathrm{ord}_2(b_1(m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, 44) = 1 \,\} = 0$$

及び

$$\min\{\, \mathrm{ord}_2(b_2(m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, 56) = 1 \ \} = 1$$

となり, さらに $\mathrm{ord}_2(b_1(15)) = 0$, $\mathrm{ord}_2(b_2(15)) = 1$, $L(E^1_{-15}, 1) \neq 0$ 及び $L(E^2_{-15}, 1) \neq 0$ となることも分かるので定理 6.4 より $\mathrm{rank}\, E^1_{-m}(\mathbb{Q}) = \mathrm{rank}\, E^2_{-m}(\mathbb{Q}) = 0$ となる square-free な整数 m が無限に存在することが分かる.

6.3 合同数問題への応用

この節では合同数問題への応用について考察する.

定義 6.11 正の整数 n に対し, 正の有理数 a, b, c が存在して $a^2 + b^2 = c^2$, $ab/2 = n$ となるとき (すなわち n が三辺が有理数の長さを持つ直角三角形の面積になるとき), n を合同数といい, そうでないとき非合同数という.

n が合同数であることと楕円曲線 $E_n : y^2 = x^3 - n^2x$ の rank が正になることは同値である事が知られている. Tunnel はさらに次のことを証明した.

定理 6.12 (Tunnell [32])

$$g(z) = \sum_{x,y,z \in \mathbb{Z}} (-1)^{x+y} q^{(4x+1)^2+16y^2+2z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) q^n$$

とおく. このとき square-free な奇数 n に対し,

$$L(E_n, 1) = \frac{b(n)^2 \Omega_{E_1}}{4\sqrt{n}}$$

となる. 特に, $b(n) \neq 0$ なら n は非合同数で Birch and Swinnerton-Dyer 予想が正しければ逆も成立する.

Tada [29] は合同数を実 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の場合に考察した.

定義 6.13 正の整数 n に対し, 正の数 $a, b, c \in K$ が存在して $a^2 + b^2 = c^2, ab/2 = n$ となるとき, n を実 2 次体 K での合同数といい, そうでないとき非合同数という.

明らかに有理数体での合同数は実 2 次体 K での合同数になる.

定理 6.14 (Tada [29], Theorem 1) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ を実 2 次体とし $m \neq 2$ とする. このとき n が実 2 次体 K での合同数であることと楕円曲線 $E_n : y^2 = x^3 - n^2x$ の実 2 次体 K 上の rank が正になることは同値である.

この定理を使って実 2 次体 K を固定したときの非合同数の分布を考察する. まず

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b(n)q^n=\sum_{x,y,z\in\mathbb{Z}}(-1)^{x+y}q^{(4x+1)^2+16y^2+2z^2}\in S_{3/2}(128,1)$$

とおいたとき,

$$s=\min\{\,\mathrm{ord}_2(b(n))\mid n>1\text{ は square-free な奇数}\,\}$$

を決定する.

$$\begin{aligned}g(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}b(n)q^n\\&=q+2q^3+q^9-2q^{11}-4q^{17}-2q^{19}-3q^{25}+\cdots\end{aligned}$$

であるから $s\leqq 1$ が分かる. さらに

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & \text{if } (n,128)=1,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned}g_1(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}b_1(n)q^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}b(n)\delta(n)q^n-\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\right)^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\delta(n)q^{n^2}\right)\end{aligned}$$

とすると補題 5.5, 5.7 より $g_1\in M_{3/2}(128,\chi_1)$ となる. $\lambda_1=25$ とおけば $n=1,\ldots,\lambda_1$ に対し $b_1(n)\equiv 0 \bmod 2$ となるから定理 6.6 より $s=1$ である. いま

$$s_m=\min\{\,\mathrm{ord}_2(b(nm))\mid n>1\text{ は square-free で }(n,2m)=1\,\}$$

とおく.

定理 6.15 ある正の整数 n_0 $(n_0=p_1\cdots p_r)$ があって $(n_0,2m)=1$ 及び $\mathrm{ord}_2(b(n_0))=1$, $\mathrm{ord}_{\ell}b(mn_0))=s_m$ を満たすとする. このとき

$$\#\{\,n\in P_r(X)\mid\ n\text{ は実 2 次体 }K\text{ での非合同数 }\}\gg\frac{X}{\log X}$$

が成り立つ.

証明 定理 6.1 により明らか. □

例 **6.16** $m = 11$ つまり $K = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$ とする.

$$\delta'(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } (n, 1408) = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくとき

$$\begin{aligned} g'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b'(n) q^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b(11n)\delta'(n) q^n - 2\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta'(n) q^{n^2}\right) \end{aligned}$$

とすると補題 5.5, 5.7 より $g'(z) \in M_{3/2}(15488, \chi)$ となる. いま $\lambda = 3169$ とおけば, $n = 1, \ldots, \lambda$ に対し $b_2(n) \equiv 0 \bmod 4$ が分かる. ゆえに定理 6.6 により,

$$\min\{\, \mathrm{ord}_2(b(11m)) \mid m > 1 \text{ は square-free で } (m, 15488) = 1 \,\} = 2.$$

が分かる. また $\mathrm{ord}_2(b(59 \cdot 11)) = 2$ なので定理 6.15 より, 実 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$ での非合同数は無限に存在する.

参考文献

[1] A. Antoniadis, M. Bungert and G. Frey, *Properties of twists of elliptic curves*, J. reine angew. Math. **405** (1990), 1–28.

[2] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond and R. Taylor, *On modularity of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 843–939.

[3] M. Chida, *Products of special values of modular L-functions and their applications*, submitted.

[4] M. Chida, *A note on Iwasawa invariants of elliptic curves*, submitted.

[5] B. Conrad, F. Diamond and R. Taylor , *Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations* , J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 521–567.

[6] G. Coogan and J. Jiménez-Urroz, *Mordell-Weil ranks of quadratic twists of pairs of elliptic curves*, J. Number Theory **96** (2002), 388–399.

[7] P. Deligne and J. -P. Serre, *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) **7** (1974), 507–530.

[8] F. Diamond, *On deformation rings and Hecke rings*, Ann. Math. **144** (1996), 137–166.

[9] S. Friedberg, J. Hoffstein, *Nonvanishing theorems for automorphic L-functions on GL(2)*, Ann. Math. **142** (1995), 385–423.

[10] D. Goldfeld , *Conjectures on elliptic curves over quadratic fields*, Number Theory, Carbondale, Springer Lect. Notes Math. **751** (1979), 108–118.

[11] D. R. Heath-Brown, *The size of the Selmer groups for the congruent number problem II*, Invent. Math. **118** (1994), 331–370.

[12] D. R. Heath-Brown, *The average of analytic rank of elliptic curves*, preprint, 2003.

[13] K. James, *L-series with nonzero central critical value*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 635–641.

[14] K. James and K. Ono, *Selmer groups of quadratic twists of elliptic curves*, Math. Ann. **314** (1999), 1–17.

[15] N. Katz and P. Sarnak *Zeros of zeta functions and symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **36** (1999), no. 1, 1–26.

[16] W. Kohnen, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Math. Ann. **271** (1985), 237–268.

[17] W. Kohnen and K. Ono, *Indivisibility of class numbers of imaginary quadratic fields and orders of Tate-Shafarevich groups of elliptic curves with complex multiplication*, Invent. Math. **135** (1999), 387–398.

[18] V. Kolyvagin, *Finiteness of $E(\mathbb{Q})$ and $Ш_{E/\mathbb{Q}}$ for a subclass of Weil curves(Russian)*, Izv. Akad. Nauk. , USSR, ser. Matem. **52** (1988), 522–540.

[19] K. Murty and R. Murty *Mean values of derivatives of modular L-series*, Ann. Math. (2)**133** (1991), 447–475.

[20] K. Ono, *Rank zero quadratic twists of modular elliptic curves*, Compositio Math. **104** (1996), 293–304.

[21] K. Ono, *Twists of elliptic curves*, Compositio Math. **106** (1997), 349–360.

[22] K. Ono, *Non-vanishing of quadratic twists of L-functions and applications to elliptic curves*, J. reine angew. Math. **533** (2001), 81–97.

[23] K. Ono and C. Skinner, *Non-vanishing of quadratic twists of L-functions*, Invent. Math. **134** (1998), 651–660.

[24] A. Perelli and J. Pomykala *Averages of twisted elliptic L-functions*, Acta Arith. **80** (1997), 149–163.

[25] G. Shimura, *On modular forms of half-integral weight*, Ann. Math. **197** (1973), 440–481.

[26] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton University Press. Princeton (1971).

[27] J. H. Silvermam, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, (1986).

[28] J. Sturm, *On the congruence of modular forms*, Springer Lect. Notes Math. **1240** (1984), 275–280.

[29] M. Tada, *Congruent numbers over real quadratic fields*, Hiroshima Math. J. **31** (2001), 331–343.

[30] J. Tate, *The arithmetic of elliptic curves*, Invent. Math. **23** (1974), 179–206.

[31] R. Taylor and A. Wiles, *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. Math. **141** (1995), 553–572.

[32] J. Tunnell, *A classical Diophantine problem and modular forms of weight* 3/2, Invent. Math. **72** (1983), 323–334.

[33] V. Vatsal, *Canonical periods and congruent formulae*, Duke. Math. J. **98** (1999), 397–419.

[34] J. L. Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier*, J. Math. Pures et Appl. **60** (1981), 375–484.

[35] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. Math. **141** (1995), 443–551.

[36] S. Wong, *Elliptic curves and class number divisibility*, Int. Math. Res. Not. **12** (1999), 661–672.