Motive と L-関数の値について

千田 雅隆

目 次

1 Chow motives and Grothendieck motives

1.1 Chow groups

X を体 k 上定義された d 次元の smooth projective な代数多様体とする．このとき X の codimension(余次元)r の既約な閉部分代数多様体の生成する自由 abel 群を $Z^r(X)$ と書くことにする．つまり，

$$Z^r(X) := \Big\{ \sum_{\text{有限和}} n_\alpha Z_\alpha \,\Big|\, n_\alpha \in \mathbb{Z},\, Z_\alpha \text{は既約な余次元}\, r \text{ の } X \text{ の閉部分代数多様体} \Big\}$$

とおく．$Z^r(X)$ の元を codimension r の algebraic cycle と呼ぶ．この部分群として

$$Z^r_{\text{num}}(X) := \{ Z \in Z^r(X) \mid Z \sim_{\text{num}} 0 \}$$
$$Z^r_{\text{hom}}(X) := \{ Z \in Z^r(X) \mid Z \sim_{\text{hom}} 0 \}$$
$$Z^r_{\text{rat}}(X) := \{ Z \in Z^r(X) \mid Z \sim_{\text{rat}} 0 \}$$

を定める．これらの同値関係はこのあと述べる．さらに

$$CH^r(X) := Z^r(X)/Z^r_{\text{rat}}(X)$$
$$CH^r_{\text{num}}(X) := Z^r_{\text{num}}(X)/Z^r_{\text{rat}}(X)$$
$$CH^r_{\text{hom}}(X) := Z^r_{\text{hom}}(X)/Z^r_{\text{rat}}(X)$$

と定義する．これらは Chow 群と呼ばれる重要な群である．$\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} CH^r(X)$ には intersection product による積の構造が入り, Chow ring と呼ばれる．

1.2 Rational equivalence

$Z^r(X)$ の元, つまり codimension r の algebraic cycle Z が X の codimension $r-1$ の部分代数多様体 Y_α と Y_α 上の関数 f_α によって $Z = \sum_\alpha \operatorname{div} f_\alpha$ と書けるとき, Z は 0 と有理同値であるといい, $Z \sim_{\text{rat}} 0$ と書くことにする．

1.3 Homological equivalence

まず Weil cohomology の復習をする．K を標数 0 の体とする．Smooth projective variety の category から K 上の anti-commutative な graded vector space の category への contravariant functor $X \mapsto H^*(X) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(X)$ が K-係数の Weil cohomology であるとは次の六つの条件を満たすことであった.

1. (Finiteness) X が既約なとき $H^i(X)$ は K 上の有限次元 vector space で $0 \leq i \leq 2d = 2\dim X$ 以外に対しては $H^i(X) = 0$.
2. (Poincare duality) Cup product $H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \to H^{2d}(X) \cong K$ は任意の $0 \leq i \leq 2d$ に対して perfect pairing.

この section は山内卓也氏による室蘭工大での motive の理論の概説講演を下に書かせていただいた.

3. (Künneth formula) 任意の X, Y に対して

$$p : X \times Y \to X,\ q : X \times Y \to Y$$

をそれぞれ projection とするとき $a \otimes b \mapsto p^*(a) \otimes q^*(b)$ は同型

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{\cong} H^*(X \times Y)$$

を与える.

4. (cycle map) ある準同型

$$\mathrm{cl}_X^r : CH^r(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2r}(X)$$

があって, 次を満たす.
(i) (functioriality) morphism $f : X \to Y$ に対して

$$f^* \circ \mathrm{cl}_Y^r = \mathrm{cl}_X^r \circ f^*$$

及び

$$f_* \circ \mathrm{cl}_X^r = \mathrm{cl}_Y^r \circ f_*$$

を満たす. ここで $f_* : H^*(X) \to H^*(Y)$ は $f^* : H^*(Y) \to H^*(X)$ の transpose.
(ii)(multiplicativity) $Z \in CH^r(X)$ 及び $Z' \in CH^s(Y)$ に対しては

$$\mathrm{cl}_{X \times Y}^{r+s}(Z \times Z') = \mathrm{cl}_X^r(Z) \otimes \mathrm{cl}_Y^s(Z').$$

(iii) (non-triviality) P を 1 点とするとき

$$CH^0(P) = \mathbb{Z} \to H^0(P) = K$$

は canonical な inclusion.

5. (Weak Lefschetz) 任意の滑らかな hyperplane section $j : W \hookrightarrow X$ に対して $j^* : H^i(X) \to H^i(W)$ は $0 \leqq i \leqq d-2$ のとき同型で $0 \leqq i \leqq d-1$ に対しては単射.

6. (Hard Lefschetz) hyperplane section W に対し, $w = \mathrm{cl}_X^1(W) \in H^2(X)$ とおいて, Lefschetz operator L を $H^i(X) \ni x \mapsto x \cdot w \in H^{i+2}(X)$ によって定める. このとき $L^i : H^{d-i}(X) \to H^{d+i}(X)$ $(i = 1, \ldots, d)$ は同型.

例えば, ℓ-adic étale cohomology $H^*_{\text{ét}}(X \times_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)$, Betti cohomology $H^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, de Rham cohomology $H^*_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{Q})$, crystalline cohomology $H^*_{\mathrm{crys}}(X)$ などは Weil cohomology であることが知られている.

いま, Weil cohomology をひとつ fix する. codimension r の algebraic cycle Z が $\mathrm{cl}_X^r(Z) = 0$ を満たすとき, Z は 0 と homological に同値であるといい, $Z \sim_{\mathrm{hom}} 0$ と書くことにする.

1.4 Numerical equivalence

codimension r の algebraic cycle Z が任意の codimension $d-r$ の algebraic cycle Z' に対して $(Z, Z') = 0$ を満たすとき, Z は 0 と numerical に同値であるといい, $Z \sim_{\mathrm{num}} 0$ と書くことにする.

Standard conjecture によって $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$ と予想されている.

1.5 Correspondence

いま algebraic cycle の同値関係 $\sim_*$, $* \in \{\mathrm{rat}, \mathrm{hom}, \mathrm{num}\}$ をひとつ選び,

$$A^r(X) := Z^r(X)/Z^r_*(X)$$

とおく. 整数 s に対して次数 s の代数的対応 (Correspondence) を

$$\mathrm{Corr}^s(X,Y) := A^{s+d}(X \times Y),\ d = \dim X$$

と定める. さらに積

$$\mathrm{Corr}^r(X,Y) \times \mathrm{Corr}^s(Y,Z) \ni (u,v) \mapsto v \cdot u \in \mathrm{Corr}^{r+s}(X,Z)$$

を $v \cdot u := \mathrm{pr}_{XZ*}(\mathrm{pr}_{XY}{}^*(u) \cdot \mathrm{pr}_{YZ}{}^*(v))$ と定義する. 但し $\cdot$ は intersection product であり $\mathrm{pr}_{..}$ は $X \times Y \times Z$ からの projection.

また, $p \in \mathrm{Corr}^0(X,X) = CH^d(X \times X)$ が $p \cdot p = p$ を満たすとき p を projector という.

1.6 Category of motives

いま algebraic cycle の同値関係 $\sim_*$, $* \in \{\mathrm{rat}, \mathrm{hom}, \mathrm{num}\}$ をひとつ選ぶ. 同値関係 $\sim_*$ に付随する motive の category $\mathcal{M}^*_k$ を次のように定義する.

1. (Object)$\mathcal{M}^*_k$ の object は三つ組 (X,p,r) から成る. ここで X は smooth projective な代数多様体, $p = p \cdot p \in \mathrm{Corr}^0(X,X)$ は projector, r は整数である. (r は Tate twist に対応)
2. (Morphism) $M_1 = (X,p,r)$, $M_2 = (Y,q,s)$ に対して
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^*_k}(M_1,M_2) := q \cdot \mathrm{Corr}^{s-r}(X,Y) \cdot p$$
と定義する.

$\mathcal{M}^*_k$ の object は motive と呼ばれる. $\mathcal{M}^{\mathrm{rat}}_k$ は Chow motive の category, $\mathcal{M}^{\mathrm{hom}}_k$ は homological motive または Grothendieck motive の category と呼ばれている.

このとき category $\mathcal{M}^*_k$ は additive であり $\mathbb{Q}$-linear category である. いま, $M_1 = (X,p,r)$, $M_2 = (Y,q,r)$ に対して

$$M_1 \oplus M_2 := (X \amalg Y, p \oplus q, r)$$

と定める. さらに $\mathrm{End}(M) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^*_k}(M,M)$ とおく. $M = (X,p,r)$ に対して $f = p \cdot f \cdot p \in \mathrm{End}(M)$ が projector なら

$$M = (X, p \cdot f \cdot p, r) \oplus (X, p - p \cdot f \cdot p, r)$$

と分解できる.

さらに category $\mathcal{M}^*_k$ には

$$(X,p,r) \otimes (Y,q,s) := (X \times Y, p \times q, r+s)$$

によって tensor product が定義できる.

代数多様体 X に対して $h(X) = (X, \mathrm{id}, 0)$ とおく. また $\mathbf{1} := (\mathrm{Spec}(k), \mathrm{id}, 0)$ を unit motive といい, $\mathbb{L} := (\mathrm{Spec}(k), \mathrm{id}, -1)$ を Lefchetz motive という. $M = (\mathrm{Spec}(k), \mathrm{id}, r)$ は Tate motive と呼ばれることもある. 定義により $(X,p,0) \otimes \mathbb{L}^{\otimes n} = (X,p,-n)$ であり, 任意の motive M はある代数多様体 X とある整数 r に対して $h(X) \otimes \mathbb{L}^r$ の直和因子となる. 実際, projector $p \in \mathrm{Corr}^0(X,X) = \mathrm{End}(h(X))$ に対して

$$M = (X,p,r) = p \cdot h(X) \otimes \mathbb{L}^{\otimes -r} \subset h(X) \otimes \mathbb{L}^{\otimes -r}$$

となっている.

1.7 Realization functor

ここでは $\mathcal{M}_k^*$ は Chow motive または Grothendick motive の category とする．いま Weil cohomology H^* をひとつ選び, 自然な functor $\mathcal{M}_k^* \to Vec_K$ を以下のように構成する．

H^* は covariant functor であったので morphism $f : X \to Y$ によって induce される map を $f^* = H^*(f) : H^*(Y) \to H^*(X)$ と書き, K-linear map $f_* : H^*(X) \to H^*(Y)$ を f^* の transpose とする．

$M = (X, p, r)$ と書いたとき p は projector であった．$\sigma \in H^i(X)$ に対して

$$p_*(\sigma) := \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{cl}^d_{X\times X}(p) \cup \mathrm{pr}_1^*(\sigma)) \in H^i(X)$$

とおく．ここで pr_1 は $X \times X$ から第一成分への projection, pr_2 は第二成分への projection である．つまり p_* は

$$p_* : H^*(X) \overset{\mathrm{pr}_1^*}{\to} H^*(X \times X) \overset{\mathrm{cl}^d_{X\times X}(p)\cup}{\to} H^*(X \times X) \overset{\mathrm{pr}_{2*}}{\to} H^*(X)$$

という合成である．このとき realization functor

$$H^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i : \mathcal{M}_k^* \to Vec_K$$

を $M = (X, p, r)$ に対し

$$H^i(M) := \mathrm{Im}\,[p_* : H^{i+2r}(X) \to H^{i+2r}(X)]$$

と定義する．

いま Δ_X を $X \times X$ の対角成分 (diagonal cycle) とすると, $\Delta_X \in CH^d(X \times X)$ なので, その cycle map での像 $[\Delta_X] \in H^{2d}(X \times X)$ に対して

$$[\Delta_X] = \sum_{i=0}^{2d} \pi_X^i, \quad \pi_X^i \in H^{2d-i}(X) \otimes H^i(X)$$

を Δ_X の定める cohomology class の Künneth 分解とする．このとき π_X^i は $\mathrm{Corr}^0(X, X)$ の projector に持ち上がると仮定する．定義より $\pi_X^i \in \mathrm{Corr}^0(X, X)$ なら自動的に π_X^i は projector になる．(一般にこのことが成り立つと予想されている (Hodge 予想の系)) いま整数 r に対して, $\mathcal{M}_k^{\mathrm{hom}}$ の motive $h^i(X)(r)$ を

$$h^i(X)(r) := (X, \pi_X^i, r)$$

と定義する．$r = 0$ のときは簡単に $h^i(X)$ と書くことにする．よって, 上の仮定の下で

$$H^*(h^i(X)) = H^i(X)$$

であり,

$$(X, \Delta_X, r) = \bigoplus_{i=0}^{2d} h^i(X)(r)$$

となる．ゆえに上のことが成り立っていれば $h(X) = (X, \Delta_X, 0)$ と置いたとき, $H^*(X) = H^*(h(X))$ となる．これらは X が curve のときには成立する．このとき $h^0(\mathbb{P}^1)(0) \simeq \mathbf{1}$, $h^2(\mathbb{P}^1)(0) \simeq \mathbb{L}$ となる．

Chow motive または Grothendieck motive M に対して

$$M_\ell := H^*_{\text{ét},\ell}(M)$$

を M の ℓ-adic realization,

$$M_{\mathrm{B}} := H^*_{\mathrm{B}}(M)$$

を M の Betti realization,

$$M_{\mathrm{dR}} := H^*_{\mathrm{dR}}(M)$$

を M の de Rham realization,

$$M_{\mathrm{crys}} := H^*_{\mathrm{crys}}(M)$$

を M の crystalline realization という.

2 Beilinson-Bloch conjecture

ここでは motive の L-関数のある整数点における零点の位数に関する Beilinson と Bloch の予想についてまとめておく. この予想は後で説明する Birch and Swinnerton-Dyer conjecture の拡張である.

まず始めに X を代数体 K 上定義された smooth projective な代数多様体とする. $H^i_{\text{ét}}(X \times \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$ を ℓ-進étale cohomology とするとき, これは $\mathbb{Q}_\ell$ 上の有限次元 vector space になり, $H^i_{\text{ét}}(X \times \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$ には K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が作用している. これにより X に付随する Galois 表現

$$\rho_{X,\ell} : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathrm{Aut}(H^i_{\text{ét}}(X \times \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell))$$

が得られる. いま素点 v での Euler factor を $v \nmid \ell$ のとき

$$P_v(H^i(X), s) := \det(1 - \mathrm{Frob}_v \cdot \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\, v^{-s} | H^i_{\text{ét}}(X \times \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_v}),$$

$v | p = \ell$ のとき

$$P_v(H^i(X), s) := \det(1 - \varphi^{[K_0:\mathbb{Q}_p]} \cdot \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\, v^{-s} | (H^i_{\text{ét}}(X \times \overline{K}, \mathbb{Q}_p) \otimes B_{\mathrm{crys}})^{D_v})$$

と置く. (B_{crys} は Fontaine の定義した環) このとき X の L-関数 $L(H^i(X), s)$ を

$$L(H^i(X), s) := \prod_{v:\mathrm{prime}} P_v(H^i(X), s)^{-1}$$

と定義する. すべての X に対する bad prime で表現が crystalline(後で定義する) なら, これは ℓ に依らずに決まる関数である. ここで $I_v := \mathrm{Gal}(\overline{K_v}/{K_v}^{\mathrm{ur}})$ は v での惰性群 (K_v^{ur} は K_v の最大不分岐拡大) であり Frob_v は v での geometric Frobenius. $D_v := \mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v)$ を分解群とするとき $q = \#\mathbb{F}_v$ 乗写像である arithmetic Frobenius は $D_v/I_v \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_v}/\mathbb{F}_v)$ の生成元であり, geometric Frobenius はその逆写像である.

この L-関数は全複素平面上に有理型に解析接続され関数等式を満たすと予想されている. また, この関数等式の形は Betti cohomology の Hodge 分解

$$H^i_{\mathrm{B}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=i, p,q \geq 0} H^{p,q}(X)$$

の形で決まる. 複素共役を c とすれば

$$c(H^{p,q}(X)) = H^{q,p}(X)$$

となる．($H^{2r}_{\mathrm{alg}}(X) = H^{2r}_{\mathrm{B}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X)$ の元は Hodge cycle と呼ばれている．なお standard conjecture により $\mathrm{cl}^r_X(CH^r(X)) = H^{2r}_{\mathrm{alg}}(X)$ と予想されていることに注意しておく) ついでに $H^i_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C})$ の Hodge filtration を定義しておく．比較同型 $H^i_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C}) \cong H^i_{\mathrm{B}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ を使って $H^i_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C})$ の Hodge filtration を

$$F^p H^i_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C}) := \bigoplus_{j+q=i, j\geq p} H^{j,q}(X)$$

と定める．また，

$$H^{p,\pm}(X) := \{x \in H^{p,p} | x^c = \pm x\} \quad (c \text{ は複素共役})$$

とおく．

いま，

$$h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X),\ h^{p,\pm} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,\pm}(X)$$

とおき，また

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2),\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$$

と定める．i が奇数のとき L-関数の無限素点での factor (Γ-factor) を

$$L_\infty(H^i(X), s) := \prod_{p<q, p+q=i} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}}$$

とおき，i が偶数のときは

$$L_\infty(H^i(X), s) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \frac{i}{2})^{h^{i/2,+}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \frac{i}{2} + 1)^{h^{i/2,-}} \prod_{p<q, p+q=i} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}}$$

とおく．このとき関数等式は

$$L(H^i(X), s) L_\infty(H^i(X), s) = \varepsilon(X, s) L(H^i(X), i+1-s) L_\infty(H^i(X), i+1-s)$$

の形になると予想されている．ここで $\varepsilon(X, s)$ は exponential factor.

$i/2$ より小さい整数 m に対して $L_\infty(H^i(X), s)$ が $s = m$ で極を持たないとき，m は critical であるという．関数等式を使うことで $i/2$ より大きい整数 m に対しても同様に定義する．

さて，L-関数の整数点での零点の位数に関して Beilinson と Bloch は次のように予想した．

予想 2.1 (Beilinson, Bloch)

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, CH^r_{\mathrm{hom}}(X) = \mathrm{ord}_{s=r} L(H^{2r-1}(X), s)$$

が成り立つ．ただし右辺の ord というのは零点の位数をあらわす．

この予想は $s = r$ での予想であるが，全ての整数点に関する予想は後で再度述べる．

この予想は簡単に代数体 K 上の Chow motive $M = (X, p, r)$ に拡張できる．つまり M_ℓ を M の ℓ-adic realization とするとき，先と同様に M_ℓ は $\mathbb{Q}_\ell$ 上の有限次元 vector space で $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群が作用しているので，Galois 表現

$$\rho_{M,\ell} : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathrm{Aut}(M_\ell)$$

が得られ，先と同様に v での Euler factor を $v \nmid \ell$ のとき

$$P_v(M, s) := \det(1 - \mathrm{Frob}_v \cdot \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\, v^{-s} | M_\ell^{I_v}),$$

$v|p=\ell$ のとき

$$P_v(M,s) := \det(1-\mathrm{Frob}_v\cdot \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\, v^{-s}|(M_p\otimes B_{\mathrm{crys}})^{D_v})$$

と置いて motive M の L-関数を

$$L(M,s) := \prod_{v:\mathrm{prime}} P_v(M,s)^{-1}$$

と定義できる．この L-関数も全複素平面上に有理型に解析接続され同じ形の関数等式を満たすと予想されている．いま, $j\neq w+2r$ ならば $H^j_{\mathrm{dR}}(M)=0$ となるとき Chow motive $M=(X,p,r)$ は pure weight w を持つという．この定義は比較同型があるので他の cohomology を取っても同じである．例えば $M=h^i(X)(r)$ ならば M は pure weight $w=i-2r$ を持つ．また motive $M=(X,p,r)$ に対する Chow 群を

$$CH^i(M) := p\cdot CH^i(X)$$

と定義する．このとき Beilinson-Bloch 予想は

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, CH^{(w+1)/2}_{\mathrm{hom}}(M) = \mathrm{ord}_{s=(w+1)/2}L(M,s)$$

となる．

Chow 群 $CH^i_{\mathrm{hom}}(X)$ への projector の作用が well-defined ではないので, この予想はそのままでは Grothendieck motive までは拡張できない．例えば一般に modular form に付随する motive は Grothendieck motive としてとれることが Scholl によって証明されているが, そのままでは Beilinson と Bloch による予想が定式化できない．そこで ℓ-adic Abel-Jacobi map を用いた定式化を紹介する．いま代数多様体 X に対し ℓ-adic Abel-Jacobi map

$$\Phi_{X,\ell} : CH^i_{\mathrm{hom}}(X)\otimes\mathbb{Q} \to H^1(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), H^{2i-1}_{\text{ét}}(X\times\overline{K},\mathbb{Q}_\ell)(i))$$

が定義できる．これを用いると, $M\subset h^{2i-1}(X)(i)$ に対して

$$\Phi_{M,\ell} : CH^i_{\mathrm{hom}}(X)\otimes\mathbb{Q} \to H^1(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), M_\ell)$$

が定義できる．このときの予想は

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell}\mathrm{Im}(\Phi_{M,\ell}) = \mathrm{ord}_{s=i}L(M,s)$$

となる．この予想は Jannsen による ℓ-adic Abel-Jacobi map の単射性の予想も含んでいることに注意する．

3　Galois representations and Selmer groups

ここでは一般の Galois 表現の compatible system $\{V_p\}_p$ に対して Bloch-Kato [2] による Selmer 群及び Tate-Shafarevich 群を定義を紹介する．K を代数体とし, V_p を $\mathbb{Q}_p$ 上の d 次元 vector space で K の絶対 Galois 群 $G_K=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が作用していると仮定する．代数体 K の素点 v に対して $I_v=\mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v^{\mathrm{ur}})$ を惰性群 $D_v=\mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v)$ を分解群とする．いま V_p に付随する Galois 表現を

$$\rho_p : G_K \to \mathrm{Aut}(V_p)\cong \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p)$$

と書くことにする．ある素点の有限集合 S が存在して, 任意の素点 v に対して, $v \notin S \cup \{\mathfrak{p}|p\}$ ならば v での Frobenius の固有多項式

$$\det(1-\rho_p(\mathrm{Frob}_v)T)=\det(1-\mathrm{Frob}_v\cdot T|{V_p}^{I_v})$$

は $\mathbb{Q}_p$-係数の多項式でかつ p に依らないで決まるとき $\{V_p\}_p$ は strictly compatible system であるという．$\{V_p\}_p$ は strictly compatible system であると仮定する．各 p に対して V_p の中に $G_{\mathbb{Q}}$-stable な rank d の lattice T_p を取り,

$$A_p := V_p/T_p$$

とおく． また整数 j に対して $V_p(j) = V_p \otimes \mathbb{Z}_p(j)$ とする． ここで $\mathbb{Z}_p(j) = \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes n}$, $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_n \mu_{p^n} = \varprojlim_n \{\zeta \in \overline{\mathbb{Q}} | \zeta^{p^n} = 1\}$ と書いた．このとき

$$H^1_f(K_v, V_p(j)) := \begin{cases} \ker(H^1(D_v, V_p(j)) \to H^1(I_v, V_p(j))) & v \nmid p, \\ \ker(H^1(D_v, V_p(j)) \to H^1(D_v, V_p(j) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{crys}})) & v|p \end{cases}$$

として,

$$H^1_f(K_v, A_p(j)) := \pi_* H^1_f(K_v, V_\lambda(j))$$

とおく．ただし π は projection $V_p(j) \xrightarrow{\pi} A_p(j)$ である．このとき T_p の Selmer 群を

$$H^1_f(K, A_p(j)) := \ker\left[H^1(K, A_p(j)) \to \prod_{v:\text{place}} \frac{H^1(K_v, A_p(j))}{H^1_f(K_v, A_p(j))}\right]$$

と定義する．

4 Bloch-Kato Conjecture

ここで述べる Bloch-Kato conjecture は L-関数の全ての整数点における値を予想する．

M を $\mathbb{Q}$ 上の Chow motive または Grothendieck motive とする．M_p を p-adic realization ($\mathbb{Q}_p$ 上の有限次元 vector space), M_{B} を Betti realization ($\mathbb{Q}$ 上の有限次元 vector space), M_{dR} を de Rham realization ($\mathbb{Q}$ 上の有限次元 vector space) とする．

$p \neq \ell$ のときは

$$H^1_e(\mathbb{Q}_\ell, M_p) := 0,\ H^1_g(\mathbb{Q}_\ell, M_p) := H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell), M_p)$$

とし, $p = \ell$ のときは

$$H^1_e(\mathbb{Q}_p, M_p) := \ker(H^1(D_p, M_p) \to H^1(D_p, M_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^{f=1}_{\mathrm{crys}})),$$
$$H^1_g(\mathbb{Q}_p, M_p) := \ker(H^1(D_p, M_p) \to H^1(D_p, M_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}))$$

とおく．また,

$$D_{\mathrm{crys}}(M_p) := H^0(D_p, M_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{crys}}) = (M_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{crys}})^{D_p},$$
$$D_{\mathrm{dR}}(M_p) := H^0(D_p, M_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}) = (M_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}})^{D_p},$$
$$D^i_{\mathrm{dR}}(M_p) := H^0(D_p, M_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^i_{\mathrm{dR}}) = (M_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^i_{\mathrm{dR}})^{D_p}$$

と定義する．このとき p-adic Hodge theory により，

$$M_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\mathrm{dR}} \overset{\cong}{\to} M_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}$$

という同型があるので D_p で固定される部分をとれば

$$\theta_p : M_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \overset{\cong}{\to} D_{\mathrm{dR}}(M_p)$$

という filtration を保つ map が得られる．(M_{dR} には Hodge filtration, $D_{\mathrm{dR}}(M_p)$ には $D^i_{\mathrm{dR}}(M_p)$ により filtration が入っている)

$p = \infty$ に対しては

$$\theta_\infty : M_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \overset{\cong}{\to} (M_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C})^+$$

とする．ここで $+$ は複素共役による不変部分である．

いま T_{B} を M_{B} の full rank lattice とし $T_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{A}_f$ は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -stable とする．p を有限素点とするとき, ほとんど全ての ℓ に対して $H^0(I_p, T_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ は divisible であると仮定する．ただし $\mathbb{A}_f$ は finite adéle. (この条件を満たす T_{B} が一般に存在することは証明されてないが, ほとんど全ての p に対して上の条件が成り立つようなものが存在することは証明されている)

このとき, ある $\mathbb{Q}$ 上の有限次元 vector space $H^1_f(M)$ が存在して

$$R_\infty : H^1_f(M) \otimes \mathbb{R} \overset{\cong}{\to} (M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{R})/(F^r M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{R} + (M_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{R})^+)$$

$$R_{Gal} : H^1_f(M) \otimes \mathbb{A}_f \overset{\cong}{\to} H^1_f(\mathbb{Q}, M_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{A}_f)$$

を満たすと仮定する．Beilinson conjecture により $M = h^i(X)(r)$ で X が regular, proper flat model $\mathcal{X}$ を持つ場合は $w = i - 2r \neq 1$ に対しては

$$H^1_f(M) = \mathrm{Im}(H^{i+1}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}(r)) \to H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(r))),$$

$w = i - 2r = 1$ に対しては

$$H^1_f(M) = CH^r_{\mathrm{hom}}(X)$$

と取れると予想される．ここで

$$H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(r)) := (K_{2r-i}(X) \otimes \mathbb{Q})^{(r)} = gr^r_\gamma(K_{2r-i}(X)) \otimes \mathbb{Q} \cong CH^r(X, 2i - r) \otimes \mathbb{Q}$$

は motivic cohomology. ((r) は k-th Adams operator の固有値 k^r に対応する eigenspace, γ は γ-filtration, $CH^r(X, m)$ は高次 Chow 群, 最後の同型は Bloch により証明された) 一般にも motivic cohomology を使って書くことが出来ると予想されている．(後でもう一度説明を加える)

R_∞ の map の行き先は Deligne coholomogy $H^{i+1}_D(X, \mathbb{R}(r))$ に等しい．上の仮定の下で R_∞ は regulator map, R_{Gal} は Chern class map により induce される．

ここで

$$T_\ell := \mathrm{Im}(T_{\mathrm{B}} \to M_\ell)$$

と置けばこれは M_ℓ の中の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable な full rank lattice. また,

$$A(\mathbb{R}) := (M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C}/(F^0 M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C} + T_{\mathrm{B}}))^+$$

とおく．ただし T_{B} は比較同型 $M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C} \cong M_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C}$ を用いて $M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C}$ の lattice とみている．$A(\mathbb{R})$ は locally compact である．このとき定義から自明に

$$M_{\mathrm{dR}}/F^0 M_{\mathrm{dR}} \to A(\mathbb{R})$$

が定まる. さらに完全系列

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{\mathrm{crys}}^{f=1} \oplus B_{\mathrm{dR}}^0 \to B_{\mathrm{dR}} \to 0$$

に $T_{\mathrm{B}} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ を tensor した後に contineous cohomology を取って得られる連結準同型は exponential map

$$\exp : D_{\mathrm{dR}}/D_{\mathrm{dR}}^0 \to H_f^1(\mathbb{Q}_p, T_{\mathrm{B}} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$$

を与える. これはもし V_p が de Rham 表現, つまり, $\dim_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V_p) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V_p$ ならばこれは同型になる. いま同型

$$\omega : \mathrm{Det}_{\mathbb{Q}}(M_{\mathrm{dR}}/M_{\mathrm{dR}}^0) \to \mathbb{Q}$$

をひとつ決めると, 先に定義した θ_p を用いて,

$$\omega_p : \mathrm{Det}_{\mathbb{Q}_p}(D_{\mathrm{dR}}(M_p)/D_{\mathrm{dR}}^0(M_p)) \to \mathbb{Q}_p$$

が定まる. ここで Det は determinant functor (あとで述べる). この場合は dimension の分の wedge product をとればよい.

以上のことを使って $\mathbb{Q}_p$ または $\mathbb{R}$ の Haar measure から induce される測度 $\mu_{p,\omega}$ $(p \leq \infty)$ を

$$A(\mathbb{Q}_p) := H_f^1(\mathbb{Q}_p, T_{\mathrm{B}} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$$

及び $A(\mathbb{R})$ に入れることが出来る. ($\mathrm{Det}_{\mathbb{Q}}(M_{\mathrm{dR}}/M_{\mathrm{dR}}^0)$ には total measure が 1 となる測度を入れる)

もし M_p が crystalline 表現 (つまり $\dim_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathrm{crys}}(M_p) = \dim_{\mathbb{Q}_p} M_p$) でかつ, $j - i < p$ という関係をみたす整数 $i \leq 0, j \geq 1$ が存在して

$$D_{\mathrm{dR}}^i(M_p) = D_{\mathrm{dR}}(M_p),\ D_{\mathrm{dR}}^j(M_p) = 0$$

となるなら, strongly divisible lattice D から構成される sublattice T_p が存在して

$$\mu_{p,\omega}(H_f^1(\mathbb{Q}_p, T_p)) = |P_p(M, 0)|_p = |\det(1 - \mathrm{Frob}_p \cdot p^0 | D_{\mathrm{crys}}(M_p))|_p$$

を満たす.

例えば, X が p で good reduction を持てば M_p は crystalline 表現である. 実は $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ の non-empty open subset U が存在して, $p \in U$ ならば任意の $\ell \neq p$ に対し M_ℓ は p で unramified $(M_\ell^{I_p} = M_\ell)$, M_p は crystalline となることが知られている. また, X が p で good reduction を持ち, $\dim X \leq (p-2)/2$ であれば上に書いた条件はすべて満たされることが知られている.

$\ell \neq p$ で M_ℓ は p で unramified ならば

$$\# H_f^1(\mathbb{Q}_\ell, T_p) = |P_p(M, 0)|_\ell^{-1}$$

であり, また

$$\mu_{p,\omega}(A(\mathbb{Q}_p)) = \mu_{p,\omega}(H_f^1(\mathbb{Q}_p, T_p)) \cdot \prod_{\ell \neq p} \# H_f^1(\mathbb{Q}_p, T_\ell)$$

であるので, もし上で挙げた条件がすべて満たされるのならば

$$\mu_{p,\omega}(A(\mathbb{Q}_p)) = \det(1 - \mathrm{Frob}_p \cdot p^0 | D_{\mathrm{crys}}(V_p))$$

である.

一般の motive に対して, p を有限素点とするとき任意の ℓ に対して Euler factor $P_p(M_\ell, x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ の元であり, ℓ に依らずに決まると予想されている. p で good reduction を持つなら Euler factor は ℓ に依らずに決まる.

S を ∞ 及び X の p-adic representation に関して先に挙げた条件をひとつでも満たさない prime を全て含むような素数の有限集合とする. (このようなものは上に書いた事実から高々有限であることが分かる) M の weight が -3 以下であるとすると

$$L_S(M,0)^{-1} = \prod_{p \notin S} P_p(M,0) = \prod_{p \notin S} \mu_{p,\omega}(A(\mathbb{Q}_p))$$

は収束する. ($P_p(M,0)$ は p での Euler factor であった) よって, このときは

$$A(\mathbb{R}) \times \prod_p A(\mathbb{Q}_p)$$

上の Tamagawa measure μ を

$$\mu := \prod_{p \leq \infty} \mu_{p,\omega}$$

によって定義することが出来る. これは同型 $\omega : \det_{\mathbb{Q}}(M_{\mathrm{dR}}/M_{\mathrm{dR}}) \to \mathbb{Q}$ の取り方に依らない.

さらに

$$A(\mathbb{Q}) := i^{-1}(R(H^1_f(M)))$$

(ただし $i : H^1_f(\mathbb{Q}, T_B \otimes \widehat{\mathbb{Z}}) \to H^1_f(\mathbb{Q}, M_B \otimes \mathbb{A}_f))$ と定義する. このとき $A(\mathbb{Q})$ は有限生成 abel 群となる. いま, R_∞ は $A(\mathbb{Q}) \to A(\mathbb{R})$ に持ち上がり, さらに $R_p : A(\mathbb{Q}) \to A(\mathbb{Q}_p)$ と合わせることで Tamagawa number

$$\mathrm{Tam}(T) := \mu(\prod_{p \leq \infty} A(\mathbb{Q}_p)/A(\mathbb{Q}))$$

が定義される.

ここで $T = T_{\mathrm{B}}$ の Tate-Sharevich 群を

$$Ш(T) := \ker \left[\frac{H^1(\mathbb{Q}, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}{A(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \to \bigoplus_{p:\mathrm{prime}} \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \right]$$

と定義する. 以上の準備の下で Bloch-Kato conjecture は次のようにして述べられる.

予想 4.1 (Bloch-Kato [2])

$$\mathrm{Tam}(T) = \frac{\# H^0(\mathbb{Q}, T^* \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))}{Ш(T)}$$

が成り立つ. ただし $T^* = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{Z})$ とおいた.

この予想は T の取り方に依らないことが示せる. また, この予想は Tate-Shafarevich 群の有限性も含んでいることに注意する. Bloch-Kato conjecture は L-関数を使って書くと

$$L(M,0) = \frac{Ш(T)\mu_{\infty,\omega}(A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q}))}{\# H^0(\mathbb{Q}, T^* \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))} \cdot \prod_{p \in S - \{\infty\}} \frac{\mu_{p,\omega}(A(\mathbb{Q}_p))}{P_p(M,0)}$$

となる.

weight が $-1, -2$ のときは L-関数の解析接続を仮定することにより Tamagawa measure を

$$\mu := \prod_{p\in S} \mu_{p,\omega} \prod_{p\notin S} \frac{\mu_{p,\omega}}{P_p(M,0)} \Big| \lim_{s\to 0} \frac{L_S(M,s)}{s^{r(M)}} \Big|$$

($r(M)$ は $L(M,s)$ の $s=0$ での零点の位数) と定める．weight が $w=i-2r=-2$ のときは先と同様に予想を定式化する．

いま, とくに weight が $w=i-2r=-1$ のときは motivic cohomology の integral part は

$$H^1_f(M) = (p\cdot CH^r_{\mathrm{hom}}(X))\otimes\mathbb{Q}$$

であることに注意する．いま $M=(X,p,r)$ の dual motive M^* を $M^*=(X,p^t,\dim X - r)$ と定める．例えば $M=h^i(X)(r)$ のときは $M^*=h^{2d-i}(X)(d-r)$ である．M に対する場合と同様に

$$A^*(\mathbb{Q}) := i^{-1}R(H^1_f(M^*))$$

と定義すると, このとき height pairing

$$A(\mathbb{Q})\times A^*(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R}$$

が定義されるので H をその determinant とするとき Tamagawa number を

$$\mathrm{Tam}(T) = \frac{\mu(\prod_{p\le\infty} A(\mathbb{Q}_p))\cdot H}{\#A(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}}$$

と定義すると予想は先と同様に定式化される．ここで $A(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}} \cong H^0(\mathbb{Q}, T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ であるから L-関数を使って Bloch-Kato conjecture を書くと

$$\lim_{s\to 0}\frac{L(M,s)}{s^{r(M)}} = \frac{Ш(T)\cdot H\cdot \mu_{\infty,\omega}(A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q}))}{\#H^0(\mathbb{Q},T\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cdot \#H^0(\mathbb{Q},T^*\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))}\cdot \prod_{p\in S-\{\infty\}} \frac{\mu_{p,\omega}(A(\mathbb{Q}_p))}{P_p(M,0)}$$

となる．

5 Equivariant Tamagawa Number Conjecture

$M=(X,p,r)$ を $\mathbb{Q}$ 上の Chow motive とする．このとき M の motivic cohomology は

$$\begin{aligned} H^0_{\mathcal{M}}(M) &:= p_*\cdot(CH^r(X)/CH^r_{\mathrm{hom}}(X))\otimes\mathbb{Q}, \\ H^1_{\mathcal{M}}(M) &:= p_*\cdot(CH^r_{\mathrm{hom}}(X))\otimes\mathbb{Q}\oplus \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}, i\neq 0} p_*\cdot(K_i(X)\otimes\mathbb{Q})^{(r)} \end{aligned}$$

と定義されるのであった．これらは $\mathcal{MM}_{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ 上の mixed motive の category とするとき

$$\begin{aligned} H^0_{\mathcal{M}}(M) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{MM}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q},M) \\ H^1_{\mathcal{M}}(M) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MM}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q},M) \end{aligned}$$

と書けると予想されている．また, motivic cohomology の integral part について簡単な場合についてもう一度述べておくと, motive $M=h^i(X)(r)$ に対して X が regular, proper flat model $\mathcal{X}$ を持つ場合は $w=i-2r\neq 1$ に対しては

$$\begin{aligned} H^0_f(M) &:= 0, \\ H^1_f(M) &:= \mathrm{Im}(H^{i+1}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X},\mathbb{Q}(r)) \to H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(r))), \end{aligned}$$

(ここで $H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(r)) = (K_{2r-i}(X)\otimes\mathbb{Q})^{(r)}$ であった) $w = i-2r = 1$ に対してはそのまま

$$H^0_f(M) := (CH^r(X)/CH^r_{\mathrm{hom}}(X))\otimes\mathbb{Q},$$
$$H^1_f(M) := CH^r_{\mathrm{hom}}(X)\otimes\mathbb{Q}$$

と定めるのであった．一般の motive に対しては Scholl [21] が integral part の構成を与えている．これらは有限次元と予想されている．

例 5.1 代数体 L に対して $M = h^0(\mathrm{Spec}\,(L))$ とするとき

$$H^0_f(M) = \mathbb{Q},\ H^1_f(M) = 0,$$

$M = h^0(\mathrm{Spec}\,(L))(1)$ とするとき

$$H^0_f(M) = 0,\ H^1_f(M) = O_L^\times\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q},$$

一般に $M = h^0(\mathrm{Spec}\,(L))(j)(j\neq 0,1)$ とするとき

$$H^1_f(M) = K_{2j-1}(L)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

であるのでこれらは有限次元である．X を smooth projective な代数多様体としたとき，$M = h^1(X)(1)$ に対しては

$$H^0_f(M) = \mathbb{Q},\ H^1_f(M) = \mathrm{Pic}^0(X)$$

なので Mordell-Weil の定理よりこれらは有限次元である．

$r(M)$ を $L(M,s)$ の $s=0$ での零点の位数として

$$L^*(M) := \lim_{s\to 0}\frac{L(M,s)}{s^{r(M)}}$$

と定義する．$M(n) = (X,p,r+n)$ とおけば $L(M(n),s) = L(M,s+n)$ なので $s=0$ で考えれば十分である．零点の order に関しては motivic cohomology を用いて

$$r(M) = \dim_{\mathbb{Q}} H^1_f(M^*(1)) - \dim_{\mathbb{Q}} H^0_f(M^*(1))$$

と予想されている．これは Beilinson-Bloch 予想の一般的な形になっている．

5.1 Determinant functor

Tamagawa number conjecture を述べるために使われる determinant functor について述べておく．

R を commutative ring として $P(R)$ を finitely generated projective R-module の category とする．$(P(R),is)$ を morphism を isomorphism に制限した subcategory とする．また，projective rank 1 の R-module L と locally constant function $\alpha:\mathrm{Spec}\,(R)\to\mathbb{Z}$ の組 (L,α) のことを graded invertibile module と呼ぶ.

$(L,\alpha),(M,\beta)$ を graded invertible module とする．R-module の homomorphism $h: L\to M$ が $\alpha(\mathfrak{p})\neq\beta(\mathfrak{p})$ となる任意の $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,(R)$ に対して h の局所化 $h_{\mathfrak{p}}$ が $h_{\mathfrak{p}} = 0$ を満たすとき，$h:(L,\alpha)\to(M,\beta)$ は graded invertible module の homomorphism であるという．いま graded invertible module とその isomorphism のなす category を $Inv(R)$ と書くことにする．この category は tensor product

$$(L,\alpha)\otimes(M,\beta):=(L\otimes_R M,\alpha+\beta)$$

が定まり, $(R,0)$ は unit object となる．また,

$$(L,\alpha)\otimes(M,\beta)\cong(M,\beta)\otimes(L,\alpha)$$

である．さらに

$$(L,\alpha)^{-1}:=(\mathrm{Hom}(L,R),-\alpha)$$

と定義する．

finitely generated projective R-module P に対して,

$$\mathrm{Det}_R P:=\left(\bigwedge_R^{\mathrm{rank}_R P}P,\mathrm{rank}_R P\right)$$

とおくと, これは graded invertible R-module であるので, Det_R は functor $(P(R),is)\to Inv(R)$ を与える．

次に finitely generated projective R-module の bounded complex $P^\bullet$ に対して

$$\mathrm{Det}_R(P^\bullet):=\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Det}_R^{(-1)^{i+1}}(P^i)$$

定義する．さらに $\mathrm{Det}_R^{-1}(P^\bullet):=\mathrm{Det}_R(P^\bullet)^{-1}$ と書くことにする．

$\mathcal{D}(R)$ を R-module の bounded complex のなす derived category とし, $\mathcal{D}^p(R)$ を R-module の perfect complex のなす full triangulated subcategory とする．$\mathcal{D}^{pis}(R)$ を $\mathcal{D}^p(R)$ の subcategory で morphism を quasi-isomorphism に制限した category とする．R は reduced, つまり 0 以外に冪零元を持たないと仮定する．このとき functor Det_R は $\mathcal{D}^{pis}(R)\to P(R)$ まで拡張することができて, 任意の $\mathcal{D}^{pis}(R)$ の distinguished triangle $C_1\to C_2\to C_3$ に対して

$$(\mathrm{Det}_R C_1)^{-1}\otimes\mathrm{Det}_R C_2\overset{\cong}{\to}\mathrm{Det}_R C_3$$

となる．

R-module X に対して $X[-1]=[0\to X\to 0]$(次数をひとつずらしている) が $\mathcal{D}^p(R)$ に入っているとき X は perfect であるという．このとき $\mathrm{Det}_R(X):=\mathrm{Det}_R(X[-1])$ と定義する．complex C が bounded で各 cohomology が perfect であるとき, C は $\mathcal{D}^p(R)$ の object であり, canonical な isomorphism

$$\mathrm{Det}_R C\overset{\cong}{\to}\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Det}_R^{(-1)^{i+1}}(H^i(C))$$

が存在する．C が acyclic なら canonical に

$$\mathrm{Det}_R C\overset{\cong}{\to}(R,0)$$

である．

5.2 Conjecture “Mot_∞”

比較同型 $M_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{C} \cong M_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C}$ から induce される map を

$$\alpha_M : M_{\mathrm{B}}^+ \otimes \mathbb{R} \to (M_{\mathrm{dR}}/F^0 M_{\mathrm{dR}}) \otimes \mathbb{R}$$

と書くことにする.

予想 5.2 (Mot_∞) 完全系列

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_f(M) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{cl}} \ker(\alpha_M) &\to (H^1_f(M^*(1)) \otimes \mathbb{R}) \\ &\xrightarrow{h} H^1_f(M) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{reg}} \mathrm{coker}(\alpha_M) \to (H^0_f(M^*(1)) \otimes \mathbb{R}) \to 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで cl は cycle map, h は height paring, reg は Beilinson の regulator map である.

いま dimension 1 の $\mathbb{Q}$-vector space $\Xi(M)$ を

$$\begin{aligned} \Xi(M) :=& \mathrm{Det}_{\mathbb{Q}}(H^0_f(M)) \otimes \mathrm{Det}^{-1}_{\mathbb{Q}}(H^1_f(M)) \otimes \mathrm{Det}_{\mathbb{Q}}(H^1_f(M^*(1))^*) \\ &\otimes \mathrm{Det}^{-1}_{\mathbb{Q}}(H^0_f(M^*(1))^*) \otimes \mathrm{Det}^{-1}_{\mathbb{Q}} M_{\mathrm{B}}^+ \otimes \mathrm{Det}_{\mathbb{Q}}(M_{\mathrm{dR}}/F^0 M_{\mathrm{dR}}) \end{aligned}$$

とおく. ただし $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Q})$ は X の dual.

上の予想を仮定すると,

$$\theta_\infty : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \Xi(M) \otimes \mathbb{R}$$

が定まる.

予想 5.3 (Rationality) $\theta_\infty(L^*(M)^{-1}) \in \Xi(M) \otimes 1$ が成り立つ.

5.3 Galois cohomology

ここでは Tamagawa number conjecture を定式化する.

素数 p に対して complex $R\Gamma_f(\mathbb{Q}_p, M_\ell)$ を

$$R\Gamma_f(\mathbb{Q}_p, M_\ell) := \begin{cases} M_\ell^{I_p} \xrightarrow{1-\mathrm{Frob}_p} M_\ell^{I_p} & \ell \neq p, \\ D_{\mathrm{crys}}(M_\ell) \xrightarrow{(1-\mathrm{Frob}_p, 1)} D_{\mathrm{crys}}(M_\ell) \oplus (D_{\mathrm{dR}}(M_\ell)/F^0 D_{\mathrm{dR}}(M_\ell)) & \ell = p \end{cases}$$

と定義する (次数は 0 次と 1 次のところに対応させる). $R\Gamma(\mathbb{Q}_p, M_\ell)$ を cohomology $H^*_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}[1/p]), M_\ell) = H^*(G_p, M_\ell)$($G_p$ は $\mathbb{Q}$ の最大 p の外不分岐拡大の Galois 群) に対応する complex とする. この cohomology は degree $0, 1, 2, 3$ 以外では acyclic である. このとき自然に $R\Gamma_f(\mathbb{Q}_p, M_\ell) \to R\Gamma(\mathbb{Q}_p, M_\ell)$ が定まるので, その mapping cone を $R\Gamma_{/f}(\mathbb{Q}_p, M_\ell)$ とおけば distingushed triangle

$$R\Gamma_f(\mathbb{Q}_p, M_\ell) \to R\Gamma(\mathbb{Q}_p, M_\ell) \to R\Gamma_{/f}(\mathbb{Q}_p, M_\ell)$$

が得られる. S を ∞ 及び X の bad prime を全て含むような素点の有限集合として $R\Gamma(\mathbb{Z}[1/S], M_\ell)$ を上と同様に定義する. また, compact support を持つ cohomology の complex を distinguished triangle

$$R\Gamma_c(\mathbb{Z}[1/S], M_\ell) \to R\Gamma(\mathbb{Z}[1/S], M_\ell) \to \bigoplus_{p \in S} R\Gamma(\mathbb{Q}_p, M_\ell)$$

によって定める.

さらに,

$$R\Gamma_f(\mathbb{Q}, M_\ell) \to R\Gamma(\mathbb{Z}[1/S], M_\ell) \to \bigoplus_{p \in S} R\Gamma_{/f}(\mathbb{Q}_p, M_\ell)$$

により $R\Gamma_f(\mathbb{Q}, M_\ell)$ を定める．このとき $H^i_f(\mathbb{Q}, M_\ell) := H^i R\Gamma_f(\mathbb{Q}, M_\ell)$ は

$$H^0_f(\mathbb{Q}, M_\ell) = H^0(\mathbb{Z}[1/S], M_\ell)$$

及び

$$H^1_f(\mathbb{Q}, M_\ell) = \mathrm{Ker}\left[H^1(\mathbb{Z}[1/S], M_\ell) \to \bigoplus_{p:\mathrm{prime}} \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, M_\ell)}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, M_\ell)}\right]$$

で与えられる．このとき六角形公理より

$$R\Gamma_c(\mathbb{Z}[1/S], M_\ell) \to R\Gamma_f(\mathbb{Q}, M_\ell) \to \bigoplus_{p \in S} R\Gamma_f(\mathbb{Q}_p, M_\ell)$$

という distinguished triangle が得られる．

予想 5.4 ($\mathbf{Mot}_\ell$) complex $R\Gamma_f(\mathbb{Q}, M_\ell)$ の cohomology を $H^*_f(\mathbb{Q}, M_\ell)$ と書くとき, $i = 0, 1$ に対して motivic cohomology との同型

$$H^*_f(M) \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong H^*_f(\mathbb{Q}, M_\ell)$$

が存在する．さらに $i = 0$ の場合はこの同型は cycle map または regulator map, $i = 1$ の場合はこの同型は ℓ-adic Chern class map で与えられる．

任意の i について $H^i_f(\mathbb{Q}, M_\ell) \cong H^{3-i}_f(\mathbb{Q}, M^*_\ell(1))^*$ が成り立つので, この予想は $R\Gamma_f(\mathbb{Q}, M_\ell)$ の cohomology を全て決定する．ゆえに, 先に述べた最後の distinguished triangle とこの予想によって同型

$$\theta_\ell : \Xi(M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathrm{Det}_{\mathbb{Q}_\ell} R\Gamma_c(\mathbb{Z}[1/S], M_\ell)$$

が定まることが分かる．

$T_\ell \subset M_\ell$ を任意の $G_{\mathbb{Q}}$-stable lattice とする．このとき次のように予想されている．

予想 5.5 (Integrality, (non-equivariant) Tamagawa number conjecture)

$$\mathbb{Z}_\ell \cdot \theta_\ell \circ \theta_\infty(L^*(M)^{-1}) = \mathrm{Det}_{\mathbb{Z}_\ell} R\Gamma_c(\mathbb{Z}[1/S], T_\ell).$$

この予想は $L^*(M) \in \mathbb{R}$ の値を up to sign で決める予想である．また, この予想は S や T_ℓ の取り方に依らないことが証明されている．

$M = h^0(\mathrm{Spec}\,(L))$ なら, この予想は類数公式の ℓ-part と同値であり, $M = h^1(X)(1)$ ならば Birch and Swinnerton-Dyer 予想の ℓ-part と同値である．

5.4 Equivariant Tamagawa number conjecture

いま, semi-simple finite dimensional $\mathbb{Q}$-algebra A が motive M に作用している場合を考える．

例 5.6

1. X が abelian variety で $A = \mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}$ の場合．
2. $X = Y \times_{\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Q})} \mathrm{Spec}\,(K)$ ($K/\mathbb{Q}$ は abelian) で $A = \mathbb{Q}[G]$ ($G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$) の場合．

3. X が modular curve で A が Hecke algebra $\mathbb{T}$ の場合.

ここで A は commutative, つまり A は number field の積になっていると仮定する. 例えば $A=\mathbb{Q}[G]$ のときは L-関数を $A\otimes\mathbb{C}$-valued function

$$L({}_AM,s):=(L(M,\chi,s))_{\chi\in\widehat{G}}$$

として定義する. 前と同様に

$$\begin{aligned}\Xi({}_AM):=&\mathrm{Det}_A(H^0_f(M))\otimes\mathrm{Det}_A^{-1}(H^1_f(M))\otimes\mathrm{Det}_A(H^1_f(M^*(1))^*)\\&\otimes\mathrm{Det}_A^{-1}(H^0_f(M^*(1))^*)\otimes\mathrm{Det}_A^{-1}M_{\mathrm{B}}^+\otimes\mathrm{Det}_A(M_{\mathrm{dR}}/F^0M_{\mathrm{dR}})\end{aligned}$$

と定義する. 同じように $r({}_AM)\in H^0(\mathrm{Spec}\,(A\otimes\mathbb{R}),\mathbb{Z})$, $L^*({}_AM)\in(A\otimes\mathbb{R})^\times$ を定義する. また,

$${}_A\theta_\infty:A\otimes\mathbb{R}\overset{\cong}{\to}\Xi({}_AM)\otimes\mathbb{R},$$

$${}_A\theta_\ell:\Xi({}_AM)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell\overset{\cong}{\to}\mathrm{Det}_{A_\ell}R\Gamma_c(\mathbb{Z}[1/S],M_\ell)$$

などが先と同様の予想の下で定義できる.

いま finite generated A-module P に対して function

$$\mathrm{Spec}\,(A)\ni\mathfrak{p}\mapsto\mathrm{rank}_{A_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p})\in\mathbb{Z}$$

を $\dim_A$ と書くことにする. このとき,

予想 5.7 (Vanishing order) $r({}_AM)=\dim_AH^1_f(M^*(1))-\dim_AH^0_f(M^*(1))$.

予想 5.8 (Rationality) $\theta_\infty(L^*({}_AM)^{-1})\in\Xi({}_AM)\otimes1$.

と予想されている.

いま, $\mathbb{Z}$-order $\mathfrak{A}\subset A$ を選ぶ. このとき, ある projective $G_\mathbb{Q}$-stable $\mathfrak{A}_\ell(:=\mathfrak{A}\otimes\mathbb{Z}_\ell)$-lattice $T_\ell\subset M_\ell$ が存在すると仮定すると $R\Gamma_c(\mathbb{Z}[1/S],T_\ell)$ は $\mathfrak{A}$-module の perfect complex で $\mathrm{Det}_{\mathfrak{A}_\ell}R\Gamma_c(\mathbb{Z}[1/S],T_\ell)$ は invertible $\mathfrak{A}_\ell$-module となる. $\mathfrak{A}_\ell$ は local ring の product であるから $\mathrm{Det}_{\mathfrak{A}_\ell}R\Gamma_c(\mathbb{Z}[1/S],T_\ell)$ は $\mathfrak{A}_\ell$ 上の rank 1 の free module になる.

M が motive M' の有限次 Galois 拡大 $L/\mathbb{Q}$ による base change $M'\otimes h^0(\mathrm{Spec}\,(L))$ になっている場合は $\mathfrak{A}=\mathbb{Z}[G]\subset A=\mathbb{Q}[G]$ に対して projective $G_\mathbb{Q}$-stable $\mathfrak{A}_\ell$-lattice T_ℓ が存在する.

予想 5.9 (Equivariant Tamagawa Number Conjecture, Burns-Flach [3])

$$\mathfrak{A}_\ell\cdot{}_A\theta_\ell\circ{}_A\theta_\infty(L^*({}_AM)^{-1})=\mathrm{Det}_{\mathfrak{A}_\ell}R\Gamma_c(\mathbb{Z}[1/S],T_\ell).$$

この予想は $L^*({}_AM)\in(A\otimes\mathbb{R})^\times$ を up to $\mathfrak{A}^\times$ で決める. Norm をとることで元々の $\mathfrak{A}=\mathbb{Z}$ の予想が得られる.

6 Number fields

ここでは代数体 L に対して $M=h^0(\mathrm{Spec}\,(L))(r)$ という motive を考える. これらは Tate motive あるいは Artin motive と呼ばれている. また $\chi:(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\to\overline{\mathbb{Q}}$ を Dirichlet character, $G=\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q})$ とし,

$$p_\chi:=\frac{1}{\#G}\sum_{\sigma\in G}\chi^{-1}(\sigma)\sigma^*\in\mathrm{End}(h^0(\mathbb{Q}(\mu_n))(0))$$

とおく. このとき

$$h(\chi)(r):=(\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Q}(\mu_n)),p_\chi,r)$$

を Dirichlet motive という.

6.1 Class number formula

$M = h^0(\mathrm{Spec}\,(L))(0)$ のときは

$$L(M,s) = \zeta_L(s) = \sum_{\mathfrak{a}\subset O_L} \frac{1}{\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}}\,\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}:\mathrm{prime}} \frac{1}{1-\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}}\,\mathfrak{p}^{-s}}$$

となる．これは Dedekind zeta と呼ばれている．いま, r_1 を実素点の個数, $2r_2$ を複素素点の個数とし, $S = \{v_j \mid j = 1, \ldots, r_1 + 2r_2\}$ を無限素点の集合とする．

定理 6.1 (Class number formula) *h_L を L の類数, d_L を discriminant, w_L を L に含まれる 1 の冪根の個数, $R_L = |\det(\log|u_i|_{v_j})|$ を regulator とするとき*

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_L(s) = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}}{w_L\sqrt{|d_L|}} R_L h_L$$

が成り立つ．

関数等式を使えばこの式は

$$\lim_{s\to 0} \frac{\zeta_L(s)}{s^{r_1+r_2-1}} = -\frac{h_L R_L}{w_L}$$

と同値である．Tamagawa number conjecture はこれらの一般化と考えることができる．(この場合は Bloch-Kato conjecture, Tamagawa number conjecture が成り立っている)

6.2 Iwasawa main conjecture

あとで書く予定．PartII の方に分けて書くかも．

6.3 Equivariant Tamagawa number conjecture

定理 6.2 (Burns-Greither [4]) *$L/\mathbb{Q}$ を abel 拡大とする．p を奇素数, r を整数, K を L の部分体とする．このとき $M = h^0(\mathrm{Spec}\,(L))(r)$, $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}[G]\,(G = \mathrm{Gal}(L/K))$ に対する equivariant Tamagawa number conjecture の p-part が成り立つ．*

$p = 2$ に対しても Flach が証明している．彼らは $r \le 0$ のときに証明を与えているが, 関数等式との compatibility が証明されているので, 全ての整数に対して証明されたことになる．

証明の概略を説明すると, まず ETNC の functoriality によって L が円分体で $K = \mathbb{Q}$ のときに証明すれば十分であることが分かる．次に abel 体の Iwasawa main conjecture を使って equivariant main conjecture を証明し, descent の議論と Huber-Wildeshaus の結果と使って生成元の比較をして証明する．

Huber-Kings は $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}$ のときに別な方法を使って証明した．Tate motive は Dirichlet motive に直和分解されるので Dirichlet motive に対しても証明されたことになる．

さらに次の結果も知られている．

定理 6.3 (Bley [1], Johnson [10]) *F を虚二次体として L/F を abel 拡大, K を L の部分体, r は $r \le 0$ を満たす整数とする．奇素数 p は $p \nmid h_F$ でかつ p が F で分解すると仮定する．このとき $M = h^0(\mathrm{Spec}\,(L))(r)$, $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}[G]\,(G = \mathrm{Gal}(L/K))$ に対する equivariant Tamagawa number conjecture の p-part が成り立つ．*

7 Elliptic curves

7.1 Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

E を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された conductor N の楕円曲線とする．いま, m を正の整数とし $E[m]$ を E の m 等分点のなす群とする．このとき E の Tate 加群 $T_p(E)$ を

$$T_p(E) := \varprojlim_n E[p^n]$$

と定義する (群として $T_p(E) \cong \mathbb{Z}_p^2$ となる)．また,

$$E[p^\infty] := \varinjlim_n E[p^n]$$

とおく．$M = h^1(E)(1)$ とおけば $T_p(E) \cong M_p$ である．いま, K を代数体または標数が 0 の局所体とする．このとき,

$$0 \to E[p^n] \to E(\overline{K}) \stackrel{p^n}{\to} E(\overline{K}) \to 0$$

という完全列を考えると, これから定まる $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module の Galois cohomology の長完全列は

$$E(K) \stackrel{p^n}{\to} E(K) \to H^1(G_K, E[p^n]) \to H^1(G_K, E(\overline{K})) \stackrel{p^n}{\to} H^1(G_K, E) \to \cdots$$

となる．これより

$$0 \to E(K)/p^nE(K) \to H^1(G_K, E[p^n]) \to H^1(G_K, E(\overline{K}))_{p^n} \to 0$$

が得られるがはじめの Kummer map $E(K)/p^nE(K) \to H^1(G_K, E[p^n])$ の direct limit をとることで単射 $E(K) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to H^1(K, E[p^\infty])$ を得る．これにより $E(K) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ は $H^1(G_K, E[p^\infty])$ の部分群と見なせる．ここで, K を代数体とするとき, 前に定義した Selmer 群の定義に当てはめて E/K の p-Selmer 群を

$$\mathrm{Sel}_p(E/K) := \ker \left[H^1(K, E[p^\infty]) \to \prod_{v \le \infty} \frac{H^1(K_v, E[p^\infty])}{E(K_v) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \right]$$

と定義する．また, E の Tate-Shafarevich 群を

$$Ш(E/K) := \ker \left[H^1(K, E(\overline{K})) \to \prod_{v:\mathrm{prime}} H^1(K_v, E) \right]$$

と定義する．これも Bloch-Kato による定義に一致する．次に楕円曲線とその L-関数との関係を述べる．E を有理数体上の楕円曲線とする．さらに E は minimal model で与えられているものとする (つまり Weierstrass 方程式の判別式の絶対値が最小になっているようなものとする)．いま

$$a_p(E) := p + 1 - \#\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$$

とおく．ここで $\#\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$ は E の $\mathrm{mod}\, p$ での解の個数とする (無限遠点も含めて数える)．このとき楕円曲線 E の L-関数 $L(E, s)$ は

$$L(E, s) = L(h^1(E), s) := \prod_{p \nmid N} \frac{1}{1 - a_p(E)p^{-s} + p^{1-2s}} \times \prod_{p \mid N} \frac{1}{1 - a_p(E)p^{-s}}$$

と定義される．Wiles[23] 等の結果により次のことが知られている．

定理 7.1 E を有理数体定義された conductor が N の楕円曲線とすると, weight が 2 の $\Gamma_0(N)$ に関する normalized newform $f_E(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ が存在して

$$L(E,s) = L(f_E,s)$$

となる.

この定理により, 特に $L(E,s)$ は $\mathbb{C}$ 上の整関数となる. L-関数と E の rank との関係は Birch and Swinnerton-Dyer conjecture によって

$$\mathrm{ord}_{s=1}L(E,s) = \mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q})$$

となると予想されている. ここで $\mathrm{ord}_{s=1}L(E,s)$ は $s=1$ での零点の位数をあらわす. この場合は

$$E(\mathbb{Q}) = CH^1_{\mathrm{hom}}(E)$$

であるから, これは Beilinson-Bloch 予想の特別な形になっている. また, central point での特殊値については

$$\lim_{s\to 1} \frac{L(E,s)}{(s-1)^{\mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q})}\Omega_E} = \frac{R_E \prod_p c_p(E) \cdot \#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})}{(\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^2}$$

となると予想されている. ここで

$$R_E := \det(\langle P_i, P_j\rangle)$$

は regulator (P_i は $E(\mathbb{Q})/E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}$ の basis), Ω_E は E の実周期であり

$$c_p := \#(E(\mathbb{Q}_p)/E_0(\mathbb{Q}_p))$$

は Tamagawa number. ただし

$$E_0(\mathbb{Q}_p) := \{\, P \in E(\mathbb{Q}_p) \mid P \bmod p \text{ は nonsingular point} \,\}$$

とおいた. E が p で good reduction を持つときは明らかに $c_p(E) = 1$ である. Bloch-Kato の定義を使うと, いま $M = h^1(E)(1)$ とおいたとき

$$c_p(E) = \frac{\mu_p(H^1_f(\mathbb{Q}_p, T_{\mathrm{B}} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}))}{P_p(M,0)}$$

となる. Bloch-Kato 予想はこれを一般化した形になっていることが分かる.
この予想に対して次のことが知られている.

定理 7.2 (Coates-Wiles[5], Kolyvagin[14],[15]) $\mathrm{ord}_{s=1}L(E,s) \le 1$ のとき

$$\mathrm{ord}_{s=1}L(E,s) = \mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q})$$

が成り立ち, このとき Tate-Shafarevich 群は有限になる.

虚数乗法を持つときを Coates-Wiles, そうでないときを Kolyvagin が証明した. 虚数乗法を持たないときの証明には Heegner point の height と L-関数の $s=1$ での 1 階微分の値とを結び付ける Gross-Zagier[9] の公式及び Heegner point のなす Euler system の議論が使われる. 定理の仮定の下で Kolyvagin は Tate-Shafarevich 群の位数に関しても評価を与えている.

7.2 Iwasawa main conjecture

いま素数 p をひとつ fix する．E は p で good ordinary reduction を持つと仮定する．

$\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension とする．つまり $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_p$ をみたす唯一の $\mathbb{Q}$ の拡大体とする．このとき $\mathrm{Sel}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は Γ-module であり，その p-primary subgroup $\mathrm{Sel}_p(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は Λ-module である．ここで $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とおいた．いま

$$X_{E,p}(\mathbb{Q}_\infty) := \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Sel}_p(E/\mathbb{Q}_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

と定義する．

定理 7.3 (Kato) *$X_{E,p}(\mathbb{Q}_\infty)$ は有限生成 torsion Λ-module.*

ゆえに有限生成 Λ-module の構造定理によって，

$$X_{E,p}(\mathbb{Q}_\infty) \sim (\bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda/(f_i(T)^{a_i})) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{m} \Lambda/(p^{\mu_j}))$$

と書くことができる．ここで f_i は distinguished polynomial で a_i, μ_j は正の整数である．また $\sim$ は左辺から右辺に Λ-module の homomorphism があって kernel と cokernel が有限になることを意味する．

このとき $X_{E,p}(\mathbb{Q}_\infty)$ の Iwasawa invariant は

$$\begin{aligned} \lambda_{E,p}^{\mathrm{alg}} &:= \sum_{i=1}^{n} a_i \deg(f_i(T)), \\ \mu_{E,p}^{\mathrm{alg}} &:= \sum_{j=1}^{m} \mu_j \end{aligned}$$

と定義される．また付随する characteristic polynomial を

$$\mathrm{char}_\Lambda(X_{E,p}(\mathbb{Q}_\infty)) := p^{\mu_{E,p}^{\mathrm{alg}}} \prod_{i=1}^{n} f_i(T)^{a_i}$$

と定義する．

次に E の p-進 L-関数に付随する Iwasawa invariant を定義する．

まず埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を fix する．$\alpha_p\beta_p = p$, $\alpha_p + \beta_p = a(p)$ によって α_p, β_p を定義する．ただし α_p は fix した埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ によって p-進単数になるように選ぶ.

定理 7.4 (Mazur, Swinnerton-Dyer [16]) *$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対し，ある冪級数 $L_{E,p}(T) \in \mathbb{Q}_p[[T]]$ が存在して次の interpolation property を満たす.*

1. $L_{E,p}(0) = (1 - \alpha_p^{-1})^2 L(E/\mathbb{Q}, 1)/\Omega_E$.
2. 任意の conductor p^n の non-trivial character $\rho : \widehat{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して，

$$L_{E,p}(\zeta - 1) = \tau(\rho^{-1})\beta_p^m L(E/\mathbb{Q}, \rho, 1)/\Omega_E$$

が成り立つ.

ここで $\zeta = \rho(1 + p)$ は 1 の p^{n-1} 乗根，τ は Gauss sum であり Ω_E は E の real period.

いま, E の p-進 L-関数を

$$L_p(E,s) := L_{E,p}((1+p)^{s-1}-1)$$

と定義する. p-進版の Weierstrass の準備定理によって, $L_{E,p}(T)$ は

$$L_{E,p}(T) = p^{\mu}u(T)f(T)$$

という形に一意に書ける. ここで μ は整数, $u(T)$ は Λ の可逆元であり, $f(T)$ は distinguished polynomial. このとき E の p-進 L-関数に付随する Iwasawa invariant は

$$\begin{aligned} \lambda_{E,p}^{\mathrm{anal}} &:= \deg(f(T)), \\ \mu_{E,p}^{\mathrm{anal}} &:= \mu \end{aligned}$$

と定義される. Mazur は楕円曲線の場合の Iwasawa main conjecture を次のように定式化した.

予想 7.5 (Iwasawa Main Conjecture) Λ の中での ideal の等式

$$(L_{E,p}(T)) = (\mathrm{char}_{\Lambda}(X_{E,p}(\mathbb{Q}_{\infty})))$$

が成り立つ.

これに対しては次のようなことが知られている.

定理 7.6 (Kato[11], Skinner-Urban [22]) *E が虚数乗法を持たないとする. E が p で good ordinary reduction を持つとき, 剰余表現が既約などのいくつかの条件の下で Iwasawa main conjecture は正しい.*

$(L_{E,p}(T))|(\mathrm{char}_{\Lambda}(X_{E,p}(\mathbb{Q}_{\infty})))$ を示すのには Beilinson-Kato element のなす Euler system が使われる. 逆を示すのには $U(2,2)$ の保型形式の Hida family を構成して Selmer 群の元を構成する. これは Mazur-Wiles の idea に基づく. E が虚数乗法を持つ場合は Rubin によって証明されている.

定理 7.7 (Rubin[18]) *E が虚数乗法を持つとき, good ordinary な素数 p に対して Iwasawa main conjecture は正しい.*

これは虚二次体の Iwasawa main conjecture に帰着させて証明される. また, p で good supersingular reduction を持つときは, また違った Iwasawa main conjecture の formulation があり, 虚数乗法を持つときは同様に証明されている.

また, p-進 Birch and Swinnerton-Dyer 予想によって

$$\mathrm{ord}_{s=1}L_p(E,s) = \mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q})$$

と予想されているが

定理 7.8 (Kato [11]) $\mathrm{ord}_{s=1}L_p(E,s) \geq \mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q})$

が証明されている.

7.3 Tamagawa number conjecture

虚数乗法を持つ楕円曲線に対する (equivariant) Tamagawa number conjecture については次のことが証明されている．ここでは regulator map と ℓ-adic Chern class map の同型を仮定することにする (weak Tamagawa number conjecture の formulation).

定理 7.9 (Kings[12]) *K を虚二次体とし, E/K を O_K により虚数乗法を持つ conductor $\mathfrak{f}$ の楕円曲線とする．さらに r は 2 以上の整数, 素数 $\ell > 3$ は $\mathfrak{f}$ と素で $H^2(\mathbb{Z}[1/m\ell], M_\ell) = 0\,(m = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\,\mathfrak{f})$ を満たすならば, $M = h^1(E)(r)$, $\mathfrak{A} = O_K$ に対する equivariant Tamagawa number conjecture が成り立つ.*

これには Deninger の Hecke character に対応する motive の L-関数の値に関する結果と Rubin による楕円単数を使った formulation の虚二次体の Iwasawa main conjecture 及びそれらと elliptic polylog との関係が使われる．

8 Modular forms

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ を重さ $2k$ で合同部分群 $\Gamma_1(N)$ に関する, 指標 ε を持つ newform とする．対応する Galois 表現は Deligne により構成された．

定理 8.1 (Deligne [6]) *p を素数とする．このとき $\mathbb{Q}_p$ 上の 2-次元 vector space $V_p = V_p(f)$ と連続な準同型*

$$\rho_{f,p} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(V_p)$$

が存在して pN を割らない任意の素数 ℓ に対して $\mathrm{trace}\,\rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a(\ell)$ 及び $\det \rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = \varepsilon(\ell)\ell^{2k-1}$ が成り立つ.

この結果により楕円曲線の時と同様 Selmer 群や Tate-Shafarevich 群などが定義できる．この具体的な構成は次の章で見ていく．

8.1 Modular motives

ここでは Scholl [19] による modular form に対応する motive の構成を復習する．N を 3 以上の整数とし, $Y(N)(\mathbb{C}) := \mathbb{H}/\Gamma(N)$ とすると, これは level N structure を持つ楕円曲線の moduli としての解釈を持ち,

$$Y(N) = \{\,(E,\alpha) \,|\, E : \text{elliptic curve}, \alpha : E[N] \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\,\}$$

となっている．$X(N)$ を $Y(N)$ の compact 化とし ($X(N)$ は generalized elliptic curve の moduli となる), $E_N \xrightarrow{f} Y(N)$ を universal elliptic curve とする．$\mathbb{C}$ 上では

$$E_N(\mathbb{C}) := \mathbb{Z}^2 \rtimes \Gamma(N)\backslash\mathbb{H} \times \mathbb{C}$$

となっている．いま,

$$\begin{aligned} {}^k_N W &:= \widetilde{H}^1(X(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Sym}^k R^1 f_* \mathbb{Q}) \\ {}^k_N W_\ell &:= \widetilde{H}^1(X(N) \times \overline{\mathbb{Q}}, \mathrm{Sym}^k R^1 f_* \mathbb{Q}_\ell) \end{aligned}$$

この sectoin は整数論サマースクール 2005 における花村昌樹氏の講演の記録を下に書かせていただいた．

とおく．但し, $\widetilde{H}^1$ は parabolic cohomology. また,

$$X(N,p) := \{(\phi,\alpha) | \phi : E \to E' \text{は} p\text{-isogeny}, \alpha : E[N] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\}$$

とおき,

$$q_1 : X(N,p) \ni (\phi,\alpha) \mapsto (E,\alpha) \in X(N)$$
$$q_2 : X(N,p) \ni (\phi,\alpha) \mapsto (E',\alpha') \in X(N)$$

と定める．このとき Hecke operator (Hecke correspondence) T_p を

$$T_p := q_{1*}\phi^* q_2^* : {}_N^kW \to {}_N^kW, {}_N^kW_\ell \to {}_N^kW_\ell$$

と定義する．

定理 8.2 Hecke operator T_p と compatible な同型

$${}_N^kW \otimes \mathbb{C} \cong S_{k+2}(\Gamma(N)) \oplus \overline{S_{k+2}(\Gamma(N))}$$

が成り立つ．

いま

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_{k+2}(\Gamma(N))$$

を Hecke eigenform とすると

$$T_p f = a_p f$$

であるから, これにより projector $\Psi_f \in \mathrm{End}({}_N^kW \otimes L)$ (ここで $L = \mathbb{Q}(\{a_n\})$ とおいた) で

$$\ker \Psi_f = \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}\overline{f}$$

となるものが構成できる．このとき Ψ_f は $\mathrm{End}({}_N^kW \otimes L)$ の元と見ることもできるので

$$V_\ell := \ker[\Psi_f : {}_N^kW_\ell \to {}_N^kW_\ell]$$

とおくと V_ℓ は f の ℓ-進表現を与える．(Deligne の定理はこれによって与えられる) $\overline{E}_N \to X(N)$ を E_N の smooth な compact 化とする．($\overline{E}_N$ は $X(N)$ 上の universal generalized elliptic curve) さらに

$$\overline{E}_N^k := \overline{E}_N \times_{X(N)} \cdots \times_{X(N)} \overline{E}_N \quad (k \text{ 個の fiber product})$$

とおいて,

$$\overline{\overline{E}}_N^k \to \overline{E}_N^k$$

を自然な minimal resolution とする．$\overline{\overline{E}}_N^k$ は Kuga-Sato variety と呼ばれている．また, $\mu_2 := \{\pm 1\}$,

$$\Gamma := (\mu_2 \rtimes (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2)^k \rtimes S_k$$

とおく．μ_2 は inversion, $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ は tranlation, 対称群 S_k は permutation で $\overline{\overline{E}}_N^k$ に作用する．また,

$$\mathrm{sgn} : \Gamma \to \{\pm 1\}$$

を μ_2 上の積と permutation の sgn との積をとる関数とする．このとき

$$\varepsilon := \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\sigma \in \Gamma} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{Q}[\Gamma]$$

は projector になる．resolution の方法がこれらの作用と equivariant なので Γ は $\overline{\overline{E}}_N^k$ にも作用している．いま Γ-module V に対して $V(\varepsilon) := \varepsilon \cdot V$ と書くことにする．

定理 8.3 (Scholl [19]) 以上の仮定の下で

$$H^*(\overline{\overline{E}}_N^k, \mathbb{Q})(\varepsilon) \cong {}_N^k W,$$

$$H^*(\overline{\overline{E}}_N^k, \mathbb{Q})(\varepsilon) \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong {}_N^k W_\ell$$

が成り立つ.

$M = (\overline{\overline{E}}_N^k, \varepsilon, 0)$ は modular form の空間 $S_{k+2}(\Gamma(N))$ に対応する Chow motive である. 先の ℓ-進表現の構成で用いた projector Φ_f と合わせれば $M \otimes L$ の submotive $\ker[\Phi_f : M \to M]$ を考えることにより, newform $f \in S_{k+2}(\Gamma(N))$ に対応する Grothendieck motive M_f が構成できる.

8.2 Bloch-Kato conjecture

modular form に対する Beilinson-Bloch conjecture に関しては次のことが知られている. いま, 簡単のため modular form の Fourier 係数は全て整数になると仮定する.

定理 8.4 (Kato [11]) $f \in S_{2k}(\Gamma_1(N))$ を newform とする. $M = M_f$ を対応する Grothendieck motive とし,

$$\Phi_{M,p} : CH^k_{\mathrm{hom}}(\overline{\overline{E}}_N^{2k-2}) \otimes \mathbb{Q} \to H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), M_p)$$

を p-進 Abel-Jacobi map とする. このとき $L(f, k) \neq 0$ ならば

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Im}(\Phi_{M,\ell}) = \mathrm{ord}_{s=k} L(M_f, s) = 0$$

が成り立つ.

また Bloch-Kato conjecture に対しては,

定理 8.5 (Kato [11]) $f \in S_{2k}(\Gamma_1(N))$ を newform とし, $L(f, k) \neq 0$ と仮定する. p を $p \nmid 2Nk!$ を満たす素数で

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{Im}[\rho_{f,p} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]$$

が成り立っているとする. このとき rank が 2 の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable $\mathbb{Z}_p$-lattice $T_p \subset M_p$ が存在して

$$\# H^1_f(\mathbb{Q}, T_p \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(k)) \leqq [\mathbb{Z}_p : L(f^*, k)/\Omega_f] \cdot \# H^0(\mathbb{Q}, T_p \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(k))^2$$

を満たす. ここで Ω_f は modular symbol に付随する period で f^* は dual cusp form.

が知られている.

8.3 Iwasawa main conjecture

ordinary な場合, つまり a_p が p で割れない場合は基本的には楕円曲線の場合と同様に main conjecture が formulate できる. supersingular のときは $a_p = 0$ のときを除いては classical な形では定式化されていない. 但し Kato の p-adic zeta element を用いた定式化がある. ordinary の場合は, やはり多くの場合に対して Kato, Skinner-Urban によって解かれたらしい. p-進 Beilinson-Bloch conjecture は Kato [11] により楕円曲線と同様の結果が得られている. analytic rank が 1 のときに Nekovar の Heegner cycle を使った仕事がある. Zhang による仕事も重要. 続きは後で書く予定.

8.4 Tamagawa number conjecture

今までほとんど結果が知られていなかったが, 最近 Flach の学生の Gealy によって Kings の結果が modular form の場合にまで拡張された.

定理 8.6 (Gealy, 2005) *$f \in S_k(\Gamma_1(N))$, $(k \geq 2,\ N \geq 5)$ を newform とし, $j > 0$ を整数, ℓ を odd prime とする. 2 での local representation は supercuspidal でないと仮定する. さらに $H^2(\mathbb{Z}[1/N\ell], T_\ell(k+j))$ は有限とし, $k = 2$ なら $L(f,1) \neq 0$, $k = 4$ なら $L(f,2) \neq 0$ と仮定する. このとき $\overline{f}$ に対する Iwasawa main conjecture が正しければ M_f に対する (weak) Tamagawa number conjecture が成り立つ.*

注 8.7 *上に書いたように modular form に対する Iwasawa main conjecture は Skinner-Urban により証明されたと発表されている.*

詳しくは後で書く予定.

参考文献

[1] W. Bley, *On the equivariant Tamagawa number conjecture for abelian extensions of a quadratic imaginary field*, preprint.

[2] S. Bloch and K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers for motives*, The Grothendieck Festschrift, **Vol. I** (1990), 333–400.

[3] D. Burns and M. Flach, *Motivic L-functions and Galois module structures*, Math. Ann. **305** (1996), 65-102.

[4] D. Burns and C. Greither, *On the Equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives*, Invent. Math. **153** (2003), 303–359.

[5] J. Coates and A. Wiles, *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **39** (1977), 223-251.

[6] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Sém. Bourbaki, éxp. 355, Lect. Notes in Math. **179** (1969), 139–172.

[7] M. Flach, *The equivariant Tamagawa number conjecture: a survey*, Stark's conjectures: recent work and new directions, Contemp. Math., **Vol. 358**, AMS, (2004),With an appendix by C. Greither, 79–125.

[8] J.-M. Fontaine, *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'um corps local, construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. Math. **115** (1982), 529–577.

[9] B. Gross and D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math. **84** (1986), 225–320.

[10] J. Johnson, preprint.

[11] K. Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, Astérisque **295** (2004), 117–290.

[12] G. Kings, *On the Tamagawa number conjecture for CM elliptic curves*, Invent. Math. **143** (2001), 571-627.

[13] S. Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures,*, In Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Hollang, Amsterdam (1968), 359–386.

[14] V. Kolyvagin, *Finiteness of $E(\mathbb{Q})$ and $Ш_{E/\mathbb{Q}}$ for a subclass of Weil curves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52** (1988), 522–540.

[15] V. Kolyvagin, *Euler systems*, The Grothendieck Festschrift, **Vol. II** (1990), 435–483.

[16] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer, *Arithmetic of Weil curves*, Invent. Math. **25** (1974), 1–61.

[17] B. Mazur , J. Tate and J. Taitelbaum, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **84** (1986), 1–48.

[18] K. Rubin, *The "Main conjecture" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields*, Invent. Math. **103** (1991), 25–68.

[19] A. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), 419–430.

[20] A. Scholl, *Classical motives*, In: Motives., Seattle 1991, ed. U.Jannsen, S.Kleiman, J-P. Serre. Proc. Symp. Pure Math. **55** (1994), Part 1,163–187.

[21] A. Scholl, *Integral elements in K-theory and products of modular curves*, The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 467–489, NATO Sci. Ser. C. Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[22] C. Skinner and E. Urban, in preparation.

[23] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. Math. **141** (1995), 443-551.