2005. 9. 3.

(15:35-) 千田 整数論(Arithmetic)のはなし. 5年後に「面白い話をきいた」と思ってくれれば…(猶予の星!)

="Congruent number problem" 合同数問題 (~10世紀, アラビア & Fibonacci 等)

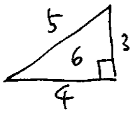
§1 合同数問題

$m, n \in \mathbb{Z}$ が mod a で合同

:⟺ $m-n$ が a の倍数

三平方の定理 $a \leq b \leq c$: 直角三角形の3辺

$\Rightarrow a^2+b^2=c^2$.



例 $3^2+4^2=5^2$ (面積 S は 6.)

def $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が合同数

:⟺ n は3辺が有理数の直角三角形の面積

名前の由来 $a^2+b^2=c^2$, $\frac{1}{2}ab=n$ のとき

$x=\left(\frac{c}{2}\right)^2$ とおくと $y=x+n$, $z=x-n$ も平方数.

[∵ $\left(\frac{c}{2}\right)^2 \pm n = \frac{a^2+b^2}{4} \pm \frac{ab}{2} = \frac{(a\pm b)^2}{4}$.]

⇒ x, y, z は mod n で合同. //

例 ・5は合同数. ∵ $\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{20}{3}\right)^2=\left(\frac{41}{6}\right)^2$,

このとき $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{20}{3}=5$. //

・7もそう. ∵ $\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{35}{12}\right)^2=\left(\frac{337}{60}\right)^2$,

$\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{5}\cdot\frac{35}{12}=7$. //

何でも合同数か? というとそんなことはない.

(Fermat) Th 1は合同数でない。<難> 図

問 (未解決)

① 与えられた n が合同数かの簡単な判定法?

② n が合同数のとき a, b, c を見つけよ.

(左余白: Kさん 関数体版はどうか?)

次がなりたつ.

(左余白: 任意の体でOK →)

Th $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し 次の3つは同値

(1) n は合同数

(2) $\exists u, v, w \in \mathbb{Q}$, $\begin{cases} u^2+n=v^2 \\ v^2+n=w^2 \end{cases}$

(3) $\exists x, y \in \mathbb{Q}\ (y \neq 0)$, $y^2=x^3-n^2x$. (!)

∵

$A_n := \{(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2+b^2=c^2, \frac{ab}{2}=n\}$

$B_n := \{(u,v,w) \in \mathbb{Q}^3 \mid v^2-n=u^2, v^2+n=w^2\}$

$C_n := \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2=x^3-n^2x, y \neq 0\}$ とする.

$\alpha: A_n \ni (a,b,c) \mapsto \left(\frac{b-a}{2}, \frac{c}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \in B_n$

$\beta: B_n \ni (u,v,w) \mapsto (w-u, w+u, 2v) \in A_n$

(左余白: 代数多様体の同型を与える!)

$\gamma: B_n \ni (u,v,w) \mapsto \left(u^2+n+uv+vw+wu,\ (u+v)(v+w)(w+u)\right) \in C_n$

$\delta: C_n \ni (x,y) \mapsto \frac{1}{2y}\left((x-n)^2-2n^2,\ x^2+n^2,\ (x+n)^2-2n^2\right) \in B_n$

により $\alpha=\beta^{-1}$, $\gamma=\delta^{-1}$; $A_n \overset{1:1}{\leftrightarrow} B_n \overset{1:1}{\leftrightarrow} C_n$ //

⑦ 今の Th を用いた「1が合同数でない」の pf (方針) <by Fermat>

(i) $y^2=x^3-x\ (y \neq 0)$ なる $x, y \in \mathbb{Q}$ があるとする.

(一般に $t=\frac{B}{A} \in \mathbb{Q}$, 既約分数 $\mapsto H(t) := \max(|A|, |B|)$ (height))

x の高さ $H(x)$ が最小の解を (x_0, y_0) とする: $x_0>1$ とできる

(ii) x_0-1, x_0, x_0+1 は平方数であることが示せる.

(iii) $y^2=x^3-x$ の別の解 (x_1, y_1) があり, $H(x_1)<H(x_0)$ 矛盾

<(i)は易. (ii)は精密なギロンが要る. 実は x_0 は倍元で その(2倍)$^{-1}$ が (x_1, y_1). [$y^2=x^3-n^2x$ のなこもについて.]

$\gamma: B_1 \ni (u,v,w) \mapsto (u^2+1, uvw) \in C_1$ が2倍写像

($\delta: C_1 \ni (x,y) \mapsto \frac{1}{2y}\left((x-1)^2-2, x^2+1, (x+1)^2-2\right) \in B_1$)//

系 $X^4+Y^4=Z^4$ をみたす $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ はない。

∵ あったとして $X^4=Z^4-Y^4$ に $\frac{Z^2}{Y^6}$ をかけると

$\frac{X^4Z^2}{Y^6}=\frac{Z^6}{Y^6}-\frac{Y^4Z^2}{Y^6}$ ∴ $\left(\frac{X^2Z}{Y^3}\right)^2=\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^3-\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)$

これは1が合同数でないことに矛盾. //

§2 楕円曲線

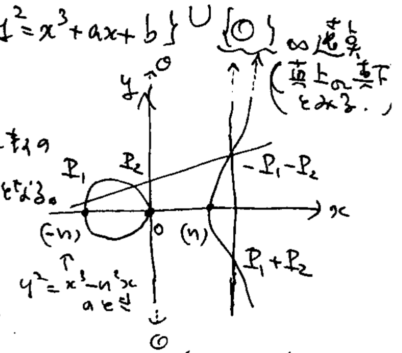
一般に $E: y^2=x^3+ax+b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$ としてよい, $4a^3+27b^2 \neq 0$ とする)

を ($\mathbb{Q}$上の) 楕円曲線という.

$E(\mathbb{Q}) := \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2=x^3+ax+b\} \cup \{O\}$ ∞遠点 (直上の真下とみる.)

$P_1, P_2 \mapsto P_1+P_2$

を右で def すると 解と係数の関係より $P_1+P_2 \in E(\mathbb{Q})$ となる。



$\begin{cases} P_1+O=O+P_1=P_1 \\ P_1+(-P_1)=O \end{cases}$ であり,

$(P_1+P_2)+P_3=P_1+(P_2+P_3)$ も成立 (←RRでわかる).

∴ $E(\mathbb{Q})$ は Abel群. 実は有限生成 (Mordell, Weil)

ex $P_1(-n,0)+P_2(0,0)=(n,0)$, $(n,0)+(n,0)=O$ である。

③ $E_n(\mathbb{Q}): y^2=x^3-n^2x$. $\ni P(x,y) \neq O$, $y \neq 0$ とすると

$2P=P+P$, $3P=P+P+P$, … は全て異なる点となる。

($lP=(x_l, y_l)$ とすると $H(x_l)$ は狭義単調増加となる。

<rem Fermat は 2^kP についてこれを示した。>

∴ n が合同数 ⟺ $\#E_n(\mathbb{Q})=\infty$. //

このことの判定のため L関数を考えよう!

§3. ζ関数, L関数

◎ (Euler-)Riemann の ζ : $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

($s=\sigma+it\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,s>1$ で収束)

Euler積: $\zeta(s)=\prod_{p:\text{素数}}(1-p^{-s})^{-1}$ である.

(K群や玉河数などとも関係!)
- $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (Euler)
- $\zeta(4)=\sum\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$, 一般に

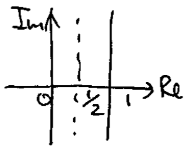
- $m=1,2,3,\cdots$ のとき
$$\zeta(2m)=(-)^{m+1}\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m},$$
但 $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}$ で Bernolli 数 $B_n\in\mathbb{Q}$ を def.

- 実は $s=1$ 以外の複素数に対しても $\zeta(s)$ を自然に定めることができる(解析接続).
$\Rightarrow$ $\Lambda(s):=\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ $\left(\Gamma(x)=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}dx\right)$
は $\Lambda(1-s)=\Lambda(s)$ をみたす.(関数等式)

- Riemannはζの零点を研究し次を予想した:

(Riemann予想)「$0\leq\mathrm{Re}\,s\leq1$ であるζの零点 s は $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}$ となる.」

(⇔ Λの零点は全て $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}$ 上)



㊟ $\zeta(-2m)=0$ $(m=1,2,\cdots)$; $\zeta(0)=-\frac{1}{12}$.

<u>Th</u>(Hardy) $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}$ 上にζの零点が∞コある.

(今の所最も予想に近い) <u>Th</u>(Selberg) $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}$ 上にζの零点が正の確率(密度)でのっている. [Conrey, '80s によると40%以上.]

◎ Dirichlet のL関数. $L(s,\chi)$

素数 p と整数 D に対し, Legendre記号を
$$\left(\frac{D}{p}\right):=\begin{cases}+1 & :\ \exists a\in\mathbb{Z},\ 0\not\equiv D\equiv a^2\ (p)\\ -1 & :\ \forall a\in\mathbb{Z},\ 0\not\equiv D\not\equiv a^2\ (p)\\ 0 & :\ 0\equiv D \bmod p.\end{cases}$$
で定める.

def $L(s,\chi_D):=\prod_{p:\text{素数}}\left(1-\left(\frac{D}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1}$ とおく.

- Dは平方数でないとすると, 次が成り立つ:

① $L(s,\chi_D)$ は $\forall s\in\mathbb{C}$ に解析接続される.
② 関数等式をもつ.
③ $L(1,\chi_D)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の類数をふくむ.
($\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ での整数の素因数分解の一意性とのずれ)

㊟ "ζ, Lの特別な点での値 ⟷ 整数論における重要な量" と信じられている.

(17:30)

◎ 楕円曲線のL関数. $L(s,E)$ 〈右辺が意味なし〉

$E: y^2=x^3+ax+b$ ($a,b\in\mathbb{Z}$, $\Delta=4a^3+27b^2\neq0$) に対し
$$\begin{cases}A_p(E):=\#\{(x,y)\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\mid y^2\equiv x^3+ax+b \bmod p\}\\ a_p(E):=p-A_p(E)\ (=p+1-\#(\{\ \}\cup\{O\}))\end{cases}$$
とし
$$L(s,E):=\prod_{p:\text{素数}}\left(1-a_p(E)p^{-s}-p^{1-2s}\right)^{-1}$$
と定める. ($\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{2}$).

問 ① $L(s,E)$ は $\forall s\in\mathbb{C}$ に解析接続されるか?
② 関数等式をもつか?
③ 特殊値は何か重要な量と関係するか?

§4. 保型形式とL関数.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^n:=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})^2(1-q^{8n})^2$$
$$=q-2q^5-3q^9+6q^{13}+2q^{17}+\cdots\quad(q=e^{2\pi iz})$$
⇒ f は上半平面で広義一様収束する正則関数で,
$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in\Gamma_0(128):=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\middle|\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{Z},\ \alpha\delta-\beta\gamma=1,\ \gamma\equiv0 \bmod 128.\right\}$
に対し $f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=(\gamma z+\delta)^2f(z)$ をみたす.

<u>def</u> このような f を重さ2, レベル128の保型形式という.

$$L(s,f):=\prod_{p:\text{素}}\left(1-a(p)p^{-s}+p^{1-2s}\right)^{-1}\ (\mathrm{Re}\,s>\tfrac{3}{2})$$
を f のL関数という. $\overset{\text{Hecke}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$ である.

(※今回3に当たる, ζ=分子/分母と書くときの分子などで正則は当然(?))

① $L(s,f)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則 〈entire!〉. (Hecke) ← (f の正則性を使っている.)
② $\Lambda(s):=(128)^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$ とおくと
$\Lambda(s)=\Lambda(1-s)$.

又 $L(s,f,\chi_D):=\prod_{p:\text{素}}\left(1-\left(\frac{D}{p}\right)a(p)p^{-s}+p^{1-2s}\right)^{-1}$
とおくと(Dirichlet's L のまね), 実は $E_n: y^2=x^3-n^2x$ のL関数 $L(s,E_n)$ との間に次の関係がある:

<u>定理</u>(Eichler-志村) $L(s,E_n)=L(s,f,\chi_n)$

㊟ 彼らは「E_n から f を」でなく「f から E_n を」作って示した.

この逆として:

<u>定理</u>(谷山-志村予想; Wiles '95 (f: sq. free), Taylor-Wiles '95, Breuil他 '99 (一般))

(※ Breuil-Conrad-Diamond-Taylor)

$\forall E$: ell. c./$\mathbb{Q}$ に対し ある保型形式 f があって
$L(s,E)=L(s,f)$

㊟ $L(s,E_1)=L(s,E_2)\Rightarrow E_1$ と E_2 は $\mathbb{Q}$ 上 isogeny.
(Faltings's Thm; Tate予想の証明の Cor.)

㊟ 上の f はあれば一意. (∵ $L(s,f)$ を Mellin変換すれば f!)

㊟ 系として, Fermatの最終定理:
「$x^n+y^n=z^n$ $(n\geq3)$ なる $x,y,z\in\mathbb{Z}_{\geq1}$ は存在しない.」が示されることは有名.

§5 楕円曲線のL関数の値.

$L(s,E)$ の③に関して、"BSD予想"がある:

Birch-Swinnerton-Dyer 予想 $L(1,E)\neq 0 \iff \#E(\mathbb{Q})<\infty$.

<②解析接続しないとイミのない場所!>

彼らは $E_n: y^2=x^3-n^2x$ の例を60'sに計算機で沢山計算し この予想を立てた.

(CがWの師匠だが 最近仲がすごく悪い)

定理 (Coates-Wiles, Gross-Zagier, Kolyvagin)

(1) $L(1,E)\neq 0 \Rightarrow \#E(\mathbb{Q})<\infty$.

(2) $L(1,E)=0$ かつ $L'(1,E)\neq 0 \Rightarrow \#E(\mathbb{Q})=\infty$.

注 (2)を $L'', L''', \dots$ にできれば BSD: OK らしい.

n: 合同数 $\iff \#E_n(\mathbb{Q})=\infty \overset{(BSD)}{\Longrightarrow} L(1,E_n)=0$,

とくに $L(1,E_n)\neq 0 \Rightarrow n$: 合同数でない。

(どうやって計算するか?)

定理 (Waldspurger, Tunnell 1983)

(1) n: 奇数のとき

$$g_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_1(n)q^n := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n})(1-q^{16n})\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{2n^2}\right)$$

とおくと

$$L(1,E_n)=\frac{b_1(n)^2}{4\sqrt{n}}\Omega_{E_1},\quad \Omega_{E_1}:=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x}}\ (=2.622\cdots)$$

(2) n: 偶数のとき

$$g_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_2(n)q^n := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n})(1-q^{16n})\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{4n^2}\right)$$

とおくと

$$L(1,E_n)=\frac{b_2(n/2)^2}{2\sqrt{2n}}\Omega_{E_1}.$$

(注 これらは「特殊値=整数」を出す数論による.)

$$g_1(z)=q+2q^3+q^9-2q^{11}-4q^{17}-2q^{19}+\cdots$$

$$g_2(z)=q+2q^5-q^9-2q^{11}-4q^{21}-q^{25}+\cdots$$

$\therefore$ $n=1,2,3,\overset{9}{},10,\overset{11}{},17,\overset{18}{},19,\dots$ は合同数でない.

又 BSD予想を認めれば $n=5,6,7,13,14,15\ \dots$ は合同数.

(21:00)

§補講 (途中で認めた大定理の背景について.)

$$f=q\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2 \ :\ \text{重さ2 レベル11}$$

$z\in\mathbb{H} \curvearrowleft \Gamma_0(11)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})\ \middle|\ c\equiv 0\ (11)\right\}$

$X_0(11):=\mathbb{H}/\Gamma_0(11)$ は ell. c. のレベル付 moduli:

$$=\left\{(E,H)\ \middle|\ \begin{array}{l}E: \mathbb{C}\text{上の ell. c.}\\ H\cong(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^2: \text{部分群}\end{array}\right\}\Big/\cong$$

$f(z)dz\in H^0(\overline{X_0(11)},\Omega_{X_0(11)})=S_2(\bullet)$: 1次元. (← cptィヒ)
$=\{\text{wt }2,\ \text{lev }N\text{ cusp forms}\}$.

$J_0(N)=\overline{X_0(N)}$ の Jacobian var: (も因子数群)

$$\underset{\mathbb{Q}}{\approx} A_1\times\cdots\times A_n\quad (A_i: \text{abelian var.})$$

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n\in S_2(\Gamma_0(N))$$

def (Hecke op.) p: 素数に対し $p\nmid N$ のとき

$T_p: S_2(\Gamma_0(N))\to S_2(\Gamma_0(N))$ を次で定める:

$$f=\sum a_nq^n\mapsto f(pz)+p\sum_{i=1}^{p-1}f\left(\frac{z+i}{p}\right).$$

$\Rightarrow [T_p, T_{p'}]=0$.

(あるような f で S_2 のbaseがとれる(Hecke))

$T_pf=a_pf\ (\forall p)$ をみたす f を Hecke eigenform という※ $(a_1=1)$

$\mathbb{T}:=\mathbb{Z}[T_p\mid p:\text{素}]\subset \mathrm{End}\,S_2(\Gamma_0(N))$

(実は $\mathbb{Z}$ 上有限生成): Hecke algebra

$\pi_f: \mathbb{T}\otimes\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を

$T_p\mapsto a_1(T_p(f))=a_p$ (← T_pf の 1st Fourier coe)

とすると $I_f:=\mathrm{Ker}\,\pi_f\cap\mathbb{T}$ は $J_0(N)$ に作用する。

(そもそも $\mathbb{T}\curvearrowright J_0(N)$ ∵ 因子 $\overset{corr}{\longleftrightarrow}$ 因子※)

※ $X_0(N) \leftarrow X_0(pN) \rightarrow X_0(N)$

志村 $A_f:=J_0(N)/I_f$: (Shimura's) abelian var/$\mathbb{Q}$

("Intro. to arithmetic of …" (Princeton))

$$\Rightarrow L(A_f,s)=\prod_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}}L(f^\sigma,s)\quad (f^\sigma=\sum a_n^\sigma q^n)$$

但 $f=\sum a_nq^n$: Hecke eigen, $a_1=1$
$K=\mathbb{Q}(a_n)/\mathbb{Q}$ は有限次拡大 ($\dim A_f\overset{=g}{}$ 次).

(注 A_f が1次元のときがさっきの話.)

これを示すには $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の ℓ進rep を使う.

$T_\ell=\varprojlim A_f[\ell^n]\cong\mathbb{Z}_\ell^{2g}$, GL_2 の話.

「重さ2」でなく「重さ一般」にするには motif が必要.

(それでも 何を全てのカラクリが見えた気はしてこないが…)

藤原さん(のプレプリ!)「$\bar\rho: \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\to GL_2(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ で

$\bar\rho\underset{(v)}{\equiv}\rho: \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\to GL_2(K_v)$ (v: ℓ上の素点) — localization

であるような ρ がどれ位あるか?」(Wiles が作った)

を F: totally real で $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ のときにやった.

($\mathbb{T}$: Hecke alg $\leftrightarrow R=\{\rho\}$) (21:40)

(11/5〜) 千田, Motive と L-fct

2005. 9. 21.

§1 Classical motives.

(Grothendieck's ↔ Beilinson, Bloch)
(pure) vs. (mixed)

$X_{k=\bar{k}}$: smooth proj. var., $d=\dim X$ とする

def
$Z^i(X) := \{ \sum_{finite} n_\alpha Z_\alpha \mid Z_\alpha :$ cod i irr. closed subvar., $n_\alpha \in \mathbb{Z} \}$
∪
$Z^i_{num}(X) := \{ Z \in Z^i(X) \mid Z \overset{num}{\sim} 0 \}$
∪
$Z^i_{hom}(X) := \{ 〃 \mid Z \overset{hom}{\sim} 0 \}$
∪
$Z^i_{rat}(X) := \{ 〃 \mid Z \overset{rat}{\sim} 0 \}$.

つぎの Chow群 → として
$CH^i_{rat}(X) = CH^i(X) = Z^i(X)/Z^i_{rat}(X)$,
↓ surj.
$CH^i_{hom}(X) = Z^i(X)/Z^i_{hom}(X)$,
↓ surj.
$CH^i_{num}(X) = Z^i(X)/Z^i_{num}(X)$.

ex. C : curve のとき
$CH^1(C) = Pic(C) = \{ \sum n_p \cdot P \mid p \in C \} / \{ div\, f \mid f \in K(C)^\times \}$ (principal divisors)
∪
[$\mathbb{C}^g/\Lambda_C \cong Pic^0(C)$] Abel-Jacobi

rem std. conj. の1つとして, $Z^i_{num}(X) = Z^i_{hom}(X)$.

① rat'l equivalence. $Z^i(X) \ni Z \overset{rat}{\sim} 0$
:⟺ $Z = \sum_\alpha div\, f_\alpha$,
∃f_α : Y_α 上の fct.,
Y_α : X の codim $= i-1$ subvar.

② numerical equiv.
$Z^i(X) \ni Z \overset{num}{\sim} 0$
:⟺ $(Z, Z') = 0 \quad \forall Z' \in Z^{d-i}(X)$.

[Kleiman's reviews, Scholl, "Classical motives".]

③ homological equiv. (based on Weil cohom. thy : 一意的に定まる) (k-coef.) [char $k=0$]

def. $H^*(X)$ が Weil cohom. theory とは (X : alg. var.)

1). (finiteness) $H^i(X)$ は fin. dim vect. sp/K, $0 \le i \le 2d$ ($d = \dim X$) 以外では $H^i(X) = 0$.

2) (Poincaré duality) $H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \xrightarrow{cup\ prod} H^{2d}(X) \cong K$, $\forall\, 0 \le i \le 2d$ に対し perfect pairing.

3) (Künneth) $\forall X, Y$ に対し
$p : X \times Y \to X$, $q : X \times Y \to Y$: proj.
について
$H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y)$ by
$a \otimes b \mapsto p^*(a) \cdot q^*(b)$.
($X \times X \xrightarrow{p_1} X$, $X \times X \xrightarrow{p_2} X$)

4) (cycle map) $\exists \gamma^i_X : CH^i(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2i}(X)$ が functorial にあって Künneth formula と compatible. //

ex l進 étale coh., crystalline coh., Betti, de Rham coh. は Weil coh.

H^* : Weil coh. に対し
$Z^i_{hom}(X) \ni Z \overset{hom}{\sim}$:⟺ $\gamma^i_X(Z) = 0$
$(Z^i(X) \to CH^i(X) \xrightarrow{\gamma_X} H^{2i}(X))$.

§2 代数的対応 (correspondence)

$Cor^s(X, Y) := CH^{s+d}(X \times_k Y)$, $\begin{pmatrix} s \in \mathbb{Z} \\ d = \dim X \end{pmatrix}$

この元を次数 s の correspondence とよぶ. 積が
$Cor^r(X,Y) \times Cor^s(Y,Z) \to Cor^{r+s}(X,Z)$
$(u, v) \mapsto v \cdot u$,

$X \times Y \times Z$; $p_{12} : \to X \times Y \supset u$, $p_{13} : \to X \times Z$, $p_{23} : \to Y \times Z \supset v$

$:= p_{13*}(p_{12}^*(u) \cdot p_{23}^*(v))$ で定まる. (↑ intersection product)

§3. Projector.

$p \in Cor^0(X, X) = CH^d(X \times X)$ が projector
:⟺ $p \circ p = p$.

def (motive(s)) k 上の motive とは motive の圏 M_k の対象

M_k の object $M = (X, \alpha, r)$; r : tate twist.
$X \in \mathcal{C}_k$ (k 上 smooth proj. var. の圏), $\alpha \in Cor^0(X, X)$

Morphism $M_1 = (X, \alpha, r)$, $M_2 = (Y, \beta, s)$ に対し
$Hom(M_1, M_2) = \beta \circ Cor^{s-r}(X, Y) \circ \alpha$,

ex $\mathbb{L} = (\mathbb{P}^1, \pi_2, 0)$: Lefschetz motive とよぶ.
($\mathbb{P}^1 \times \{0\}$) $M = (X, \alpha, r)$ に対して
$M = (X, \alpha, 0) \otimes \mathbb{L}^{-r}$ が成立.
$(X, \alpha, 0) \otimes (Y, \beta, s) := (X \times Y, \alpha \otimes \beta, r+s)$

§4. Realization functor. $H^i(\cdot)$

(motive に対して Weil coh を与えよう!)

$\mathcal{C}_k \to M_k$
$X \mapsto h(X) := (X, \Delta_X, 0)$ ($X \times X \supset$ diag)

一方 $\mathcal{C}_k \to Vec/K$
$X \mapsto H^*(X) := \bigoplus_{i=0}^{2\dim Y} H^i(X)$ がある.

これは M_k で分解するだろう: $M_k \to Vec$ を作りたい.
H^* : Weil cohom. とする.

$M = (X, \alpha, r)$, $\alpha \in Cor^0(X, X)$: projector
$\sigma \in H^i(X)$ に対し
$H^i(X) \xrightarrow{p_1^*} H^i(X \times X) \xrightarrow{\gamma^d_{X \times X}(\alpha) \cup} H^{i+2d}(X \times X) \xrightarrow{p_{2*}} H^i(X)$ (cycle map, cup prod.)
$\sigma \longmapsto \alpha^*(\sigma)$
$(\gamma^d_{X \times X} : CH^d(X \times X) \to H^{2d}(X \times X).)$

i.e. $\alpha^*(\sigma) = p_{2*}(\gamma_{X \times X}(\alpha) \cup p_1^*(\sigma))$.

で $\alpha^* : H^i(X) \to H^i(X)$ を定めるとき

[CH^i が realization fctr.] **def** $H^i(M) := Im(\alpha^* : H^{i+2r}(X) \circlearrowleft)$ $CH^{i+2r}(X)$ とおく.

2005.4.X.2.

① Conj. (Hodge conj.) [Serre と Grothendieck]

$H^d(X\times X) \to H^{2d}_{Betti}(X\times X) \cong \bigoplus_{p+q=2d} H^{p,q}_{Betti}(X\times X)$

$\cup$ のとき $\Delta_X \longmapsto \sum_{p+q=2d} \Delta_X^{p,q}$ と書くと

$\exists\, \varpi^{p,q} \in Cor^0(X\times X)$: projector s.t.

$\varpi^{p,q} \mapsto \Delta_X^{p,q}$, $\Delta_X = \sum \varpi^{p,q}$.

(注) 一般に: $H^i(h(X)) \subseteq H^i(X) \subset H^{i+2k}(X)$,

Hodge conj. ⇒ $H^i(h(X)) = H^i(X)$ が成立.

§5. L-fc.

$M = (X_{/k=\mathbb{Q}}, d, k)$, { ~~char k = p~~, ℓ: 素数, ~~(ℓ, p) = 1~~ }

$Gal(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \curvearrowright H_{et,\ell}(M)$: 有限次元 vect.sp $/K=\mathbb{Q}_\ell$.

$\rho : Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to Aut(H_{et,\ell}(M))$ として

Motif の L-fc を

$$L(M,s) := \prod_{p:\text{素数}} \det(1-\rho(Frob_p)p^{-s} \mid H_{et,\ell}(M))^{-1}$$

とおくと Re s >> 0 で収束する事. (Conj.)

∃ (Fontaine-Mazur conj: p = char k 以外で不分岐, 端以外は 0 の Gal. rep は上の形のみ ②)

Conj. (Beilinson-Bloch Conj.) $d = \dim X$.

$$\mathrm{ord}_{s=d} L(M,s) = \dim_{\mathbb{Q}}(CH^d_{hom}(X)\otimes\mathbb{Q}).$$

zero の order.

(注) これは BSD予想 を含んでいる!

[比較同型]

$V_B := H_{Betti}(M)$, $V_{dR} := H_{deR}(M)$,

$V_\ell := H_{et,\ell}(M)$ とする ⇒ $V_B \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong V_\ell$, $V_B \cong V_{dR}$.

($Gal(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ Gal. cohom)

ℓ ≠ p の時, $H^1_f(\mathbb{Q}_p, V_\ell) = \ker(H^1(D_p, V_\ell) \to H^1(I_p, V_\ell))$

⟨ "finite" 分解群 $D_p \cong Gal(\bar{F}_p/F_p)$ 惰性群 ⟩

ℓ = p の時 $H^1_f(\mathbb{Q}_\ell, V_\ell) = \ker(H^1(\mathbb{Q}_\ell, V_\ell) \to H^1(\mathbb{Q}_\ell, V_\ell \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} B_{crys}))$

とおく. ⟨ $\bar{\mathbb{Q}}_\ell \subset B_{crys}$ Frob を入れた, defed by Fontaine ⟩

$H^1_f(\mathbb{Q}, V_\ell) = \{c \in H^1(\mathbb{Q}, V_\ell) \mid res_p(c) \in H^1_f(\mathbb{Q}_p, V_\ell) : \forall p\}$

とし $V_\ell \supset T_\ell$: $\mathbb{Z}_\ell$-lattice, $A_\ell := V_\ell/T_\ell$ とすれば

$0 \to T_\ell \to V_\ell \xrightarrow{\pi} A_\ell \to 0$,

$H^1_f(\mathbb{Q}_p, A_p) := \pi_* H^1_f(\mathbb{Q}_p, V_\ell)$ がある.

def $H^1_f(\mathbb{Q}, A_p) := \{c \in H^1(\mathbb{Q}, A_\ell) \mid res_p(c) \in H^1_f(\mathbb{Q}_p, A_\ell)\ (\forall p)\}$

を M の Selmer group とよぶ.

これは通常の Selmer gp. の拡張になっている.

(②)

(②) (注) E: ell. c. のとき

$0 \to E[\ell^n] \to E(\bar{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\ell^n} E(\bar{\mathbb{Q}}) \to 0$

∴ $0 \to E(\mathbb{Q})/\ell^n E(\mathbb{Q}) \to H^1(\mathbb{Q}, E[\ell^n]) \to H^1(\mathbb{Q}, E(\bar{\mathbb{Q}}))_n \to 0$

∴ direct lim をとって

$E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(\mathbb{Q}, E[\ell^\infty])$

∴ $Sel_{\ell^\infty}(E/\mathbb{Q}) = \{c \in H^1(\mathbb{Q}, E[\ell^\infty]) \mid res_p(c) \in E(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell,\ \forall p\}$

(03:00)

def M の Tate-Shafarevich gp. を次で定義する:

$Ш(M) := \bigoplus_{\ell:prime} H^1_f(\mathbb{Q}, A_\ell)/\pi_* H^1_f(\mathbb{Q}, V_\ell)$

$\Gamma_{\mathbb{Q}}(M) := \bigoplus_{\ell:prime} H^0(\mathbb{Q}, A_\ell)$: M の global point ($= E(\ell)(\mathbb{Q})$)

$\det((V_B \otimes \mathbb{R})^+ \xrightarrow{\cong} (V_{dR} \otimes \mathbb{R})^+) =: vol_\infty(M)$ とおく. (cpx conj で fixed)

cf. $M = (E, O_E, 0)$ のとき $vol_\infty(M) = \int_{E(\mathbb{R})} \frac{dx}{y}$.

Conj (Bloch-Kato conj の一部) $\frac{L(M,d)}{vol_\infty(M)} \in \mathbb{Q}$.

(def 玉河測度 Bloch-Kato の exp map

$V_{dR} \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\cong} H^1_f(\mathbb{Q}_p, V_p)$, ここに測度を

$\cup$ T_{dR} — $V_{dR} \otimes \mathbb{Z}_p$ の image が vol = 1 の時に入れる。

$vol_p := \prod_{\ell \neq p} \# H^1_f(\mathbb{Q}_p, T_p) \times vol(Im\, H^1_f(\mathbb{Q}_p, T_p))$,

$c_p := vol_p / \det_p(1-\rho(Frob_p)p^{-d} \mid H_{et,\ell}(M))^{-1}$

⇒ $vol_\infty \times \prod_p c_p$ は V_{dR} の basis の取り方によらない.

Conj (Bloch-Kato) '90s

$$(\mathbb{Q}^\times \ni)\ 0 \neq \frac{L(M,d)}{vol_\infty(M)} = \frac{\prod_p c_p \cdot \# Ш(M)}{\#\Gamma_{\mathbb{Q}}(M) \cdot \#\Gamma_{\mathbb{Q}}(M^\vee)}$$

(Tannakian dual.)

(注) これは Abelian var. の BSD conj の自然な一般化.

(3:10)